3 Effiziente Analyse von Produktformwarteschlangennetzen

- Faltungsalgorithmus (Convolution):

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sind Vektoren der Laenge $\boldsymbol{K+1}$.
Dann ist gilt fuer Faltung $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C(k) = \sum_{j=0}^{k} A(j) \cdot B(k-j)\,, \quad k = 0, \ldots, K\,.}$$

➤ Beim Faltungsalgorithmus wird die Normalisierungskonstante durch Faltung aus zwei Vektoren ermittelt.

◆ Produktformlösung;

$$\pi(k_1, \ldots, k_N) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

mit der Normalisierungskonstanten:

$$G(K) = \sum_{\sum_{i=1}^{N} k_i = K} \prod_{i=1}^{N} F_i(k_i)$$

◆ Definition:

$$G_n(k) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} k_i = k} \prod_{i=1}^{n} F_i(k_i)$$

Damit gilt für die Normalisierungskonstante:

$$G(K) = G_N(K)$$

Es kann gezeigt werden, dass gilt:

$$G_n(k) = \sum_{j=0}^{k} F_n(j) \cdot G_{n-1}(k-j)$$

D.h. G_n ist die Faltung von F_n und $G_{n\text{-}1}$

◆ Faltungsalgorithmus zur Berechnung der Normalisierungskonstanten:

	1	$\cdots$	$n-1$		n	$\cdots$	N
0	1	$\ldots$	$G_{n-1}(0)(\cdot F_n(k))$		1		$1 = G(1)$
1	$F_1(1)$	$\ldots$	$G_{n-1}(1)(\cdot F_n(k-1))$		$G_n(1)$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
$k-1$	$F_1(k-1)$	$\ldots$	$G_{n-1}(k-1)(\cdot F_n(1))$	$\sum$			
k	$F_1(k)$	$\ldots$	$G_{n-1}(k)(\cdot F_n(0))$	$\rightarrow$	$G_n(k)$	$\cdots$	$G_N(k) = G(k)$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$		
K	$F_1(K)$				$G_n(K)$		$G_N(K) = G(K)$

Dabei wurden die folgenden Anfangsbedingungen berücksichtigt:

$$\boldsymbol{G_1(k) = F_1(k), \quad k = 1, \ldots, K}$$

$$\boldsymbol{G_n(0) = 1, \quad n = 1, \ldots, N}$$

◆ Berechnung der Leistungsgrößen direkt aus den Normalisierungskonstanten:

➤ **Randwahrscheinlichkeiten**:

$$\pi_i(k) = \frac{F_i(k)}{G(K)} \cdot G_N^{(i)}(K-k)$$

$G_N^{(i)}$ kann als Normalisierungskonstante eines Netzes mit k Aufträgen und ohne den Knoten i angesehen werden.

$G_N^{(i)}$ kann iterativ berechnet werden mit:

$$G_N^{(i)}(k) = G(k) - \sum_{j=1}^{k} F_i(j) \cdot G_N^{(i)}(k-j)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$G_N^{(i)}(0) = G(0) = 1\,, \quad i = 1, \ldots, N$$

Für $m_i = 1$ gilt die wesentlich einfachere Beziehung:

$$\pi_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{1}{G(K)} \cdot \left(G(K-k) - \frac{e_i}{\mu_i} \cdot G(K-k-1)\right)$$

➤ **Durchsatz**:

$$\lambda(K) = \frac{G(K-1)}{G(K)} \quad \text{und} \quad \lambda_i(K) = e_i \cdot \frac{G(K-1)}{G(K)}$$

➤ **Auslastung**:

$$\rho_i = \frac{e_i}{m_i \mu_i} \cdot \frac{G(K-1)}{G(K)}$$

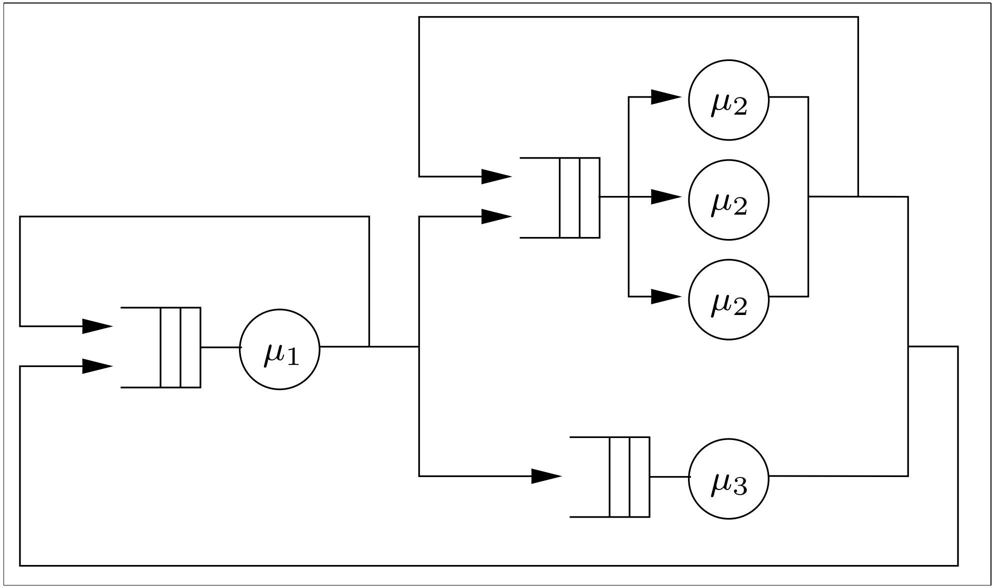
➤ **Mittlere Anzahl von Aufträgen:**

$$\overline{K}_i = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{G(K)}$$

➤ **Mittlere Antwortzeit** (mit Little):

$$\overline{T}_i = \frac{\overline{K}_i}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \cdot \frac{G(K-k)}{e_i \cdot G(K-1)}$$

◆ Beispiel: Geschlossenes WS-Netz mir einer Auftragsklasse:



➤ Anzahl der Knoten: N =3

➤ Anzahl der Aufträge: K = 3

➤ Anzahl der Bedieneinheiten der Knoten:

$$m_1 = 2;\quad m_2 = 3;\quad m_3 = 1$$

➤ Bedienraten: $\mu_1 = 0.8/\text{sec}$; $\mu_2 = 0.6/\text{sec}$; $\mu_3 = 0.4/\text{sec}$

➤ Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1$; $e_2 = 0.667$; $e_3 = 0.2$

Leistungsgrößen:

- Funktionen $F_i(k_i)$:

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{F_1(0) = \underline{1}}, & \boldsymbol{F_2(0) = \underline{1}}, & \boldsymbol{F_3(0) = \underline{1}}, \\
\boldsymbol{F_1(1) = \underline{1.25}}, & \boldsymbol{F_2(1) = \underline{1.111}}, & \boldsymbol{F_3(1) = \underline{0.5}}, \\
\boldsymbol{F_1(2) = \underline{0.781}}, & \boldsymbol{F_2(2) = \underline{0.617}}, & \boldsymbol{F_3(2) = \underline{0.25}}, \\
\boldsymbol{F_1(3) = \underline{0.488}}, & \boldsymbol{F_2(3) = \underline{0.229}}, & \boldsymbol{F_3(3) = \underline{0.125}}.
\end{array}
$$

- Normalisierungskonstante:

	1	2	N=3
0	1	1	1
1	1.25	2.361	2.861
2	0.781	2.787	4.218
K=3	0.488	2.356	4.465

- Randwahrscheinlichkeiten:
  - ➤ Knoten 3:

$$\pi_3(0) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^0 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(3) - \frac{e_3}{\mu_3} G(2)\right) = \underline{0.528}\,,$$

$$\pi_3(1) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^1 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(2) - \frac{e_3}{\mu_3} G(1)\right) = \underline{0.312}\,,$$

$$\pi_3(2) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(1) - \frac{e_3}{\mu_3} G(0)\right) = \underline{0.132}\,,$$

$$\pi_3(3) = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3 \cdot \frac{1}{G(3)} \cdot \left(G(0) - \frac{e_3}{\mu_3} \cdot 0\right) = \underline{0.028}\,.$$

➤ Knoten 1 und Knoten 2:

Iterative Berechnung der NK $G_N^{(i)}$:

$$G_N^{(1)}(0) = \underline{1}\,,$$
$$G_N^{(1)}(1) = G(1) - F_1(1)G_N^{(1)}(0) = \underline{1.611}\,,$$
$$G_N^{(1)}(2) = G(2) - (F_1(1)G_N^{(1)}(1) + F_1(2)G_N^{(1)}(0)) = \underline{1.423}\,,$$
$$G_N^{(1)}(3) = G(3) - (F_1(1)G_N^{(1)}(2) + F_1(2)G_N^{(1)}(1) + F_1(3)G_N^{(1)}(0)) = \underline{0.940}\,.$$

Entsprechend:

$$G_N^{(2)}(0) = \underline{1}\,, \quad G_N^{(2)}(1) = \underline{1.656}\,, \quad G_N^{(2)}(2) = \underline{1.75}\,, \quad G_N^{(2)}(3) = \underline{1.316}$$

und damit die Randwahrscheinlichkeiten:

$$\pi_1(0) = \frac{F_1(0)}{G(3)} G_N^{(1)}(3) = \underline{0.211}\,, \quad \pi_1(1) = \frac{F_1(1)}{G(3)} G_N^{(1)}(2) = \underline{0.398}\,,$$
$$\pi_1(2) = \frac{F_1(2)}{G(3)} G_N^{(1)}(1) = \underline{0.282}\,, \quad \pi_1(3) = \frac{F_1(3)}{G(3)} G_N^{(1)}(0) = \underline{0.109}\,,$$

$$\pi_2(0) = \underline{0.295}\,, \quad \pi_2(1) = \underline{0.412}\,, \quad \pi_2(2) = \underline{0.242}\,, \quad \pi_2(3) = \underline{0.051}$$

- Durchsätze:

$$\lambda_1 = e_1 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.945}\,, \quad \lambda_2 = e_2 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.630}\,, \quad \lambda_3 = e_3 \frac{G(2)}{G(3)} = \underline{0.189}$$

- Auslastungen:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1\mu_1} = \underline{0.590}\,, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \underline{0.350}\,, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \underline{0.473}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten:

$$\overline{K}_1 = \pi_1(1) + 2\pi_1(2) + 3\pi_1(3) = \underline{1.290}\,,$$
$$\overline{K}_2 = \pi_2(1) + 2\pi_2(2) + 3\pi_2(3) = \underline{1.050}\,,$$

$$\overline{K}_3 = \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)\frac{G(2)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^2\frac{G(1)}{G(3)} + \left(\frac{e_3}{\mu_3}\right)^3\frac{G(0)}{G(3)} = \underline{0.660}$$

Mittelwertanalyse (Mean Value Analysis):

- Grundlegende Gesetzmäßigkeiten:

  - Satz von Little:

$$\overline{K} = \lambda \cdot \overline{T}$$

  - Ankunftstheorem:

$$\overline{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i} \cdot \left[1 + \overline{K}_i(K-1)\right] \;, \qquad i = 1, \ldots, N$$

◆ Algorithmus:

- ***Schritt*** 1: Initialisierung:

$$\text{Fuer } \boldsymbol{i = 1, \ldots, N} \text{ und } \boldsymbol{j = 1, \ldots, (m_i - 1)}$$

$$\boldsymbol{\overline{K}_i(0) = 0, \quad \pi_i(0 \mid 0) = 1, \quad \pi_i(j \mid 0) = 0}$$

- ***Schritt*** 2: Iteration über die Anzahl der Aufträge: $k = 1, \ldots, K$.

  ➤ *Schritt* 2.1: Mittlere Antwortzeit für die Knoten $i = 1, \ldots, N$ (Ankunftstheorem):

$$\overline{T}_i(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_i}\left[1 + \overline{K}_i(k-1)\right], & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ \dfrac{1}{\mu_i \cdot m_i}\left[1 + \overline{K}_i(k-1) + \displaystyle\sum_{j=0}^{m_i-2} (m_i - j - 1) \cdot \pi_i(j \mid k-1)\right], & \text{Type-1 } (m_i > 1), \\ \dfrac{1}{\mu_i}, & \text{Type-3}, \end{cases}$$

➤ *Schritt* 2.2: Gesamtdurchsatz (mit Little):

$$\boldsymbol{\lambda(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^{N} e_i \cdot \overline{T}_i(k)}}$$

Durchsätze der einzelnen Knoten $i = 1, \ldots, \underline{N}$:

$$\boldsymbol{\lambda_i(k) = e_i \cdot \lambda(k)}$$

➤ *Schritt* 2.3: Mittlere Anzahl der Aufträge in den Knoten $i = 1, \ldots, N$ (mit Little):

$$\boldsymbol{\overline{K}_i(k) = e_i \cdot \lambda(k) \cdot \overline{T}_i(k)}$$

➤ zu Schritt 2.1:

Iterative Berechnung der Randwahrscheinlichkeiten für den Typ-1 Knoten ($m_i > 1$):

$$\pi_i(j \mid k) = \frac{\lambda_i(k)}{\mu_i \cdot j} \cdot \pi_i(j-1 \mid k-1)$$

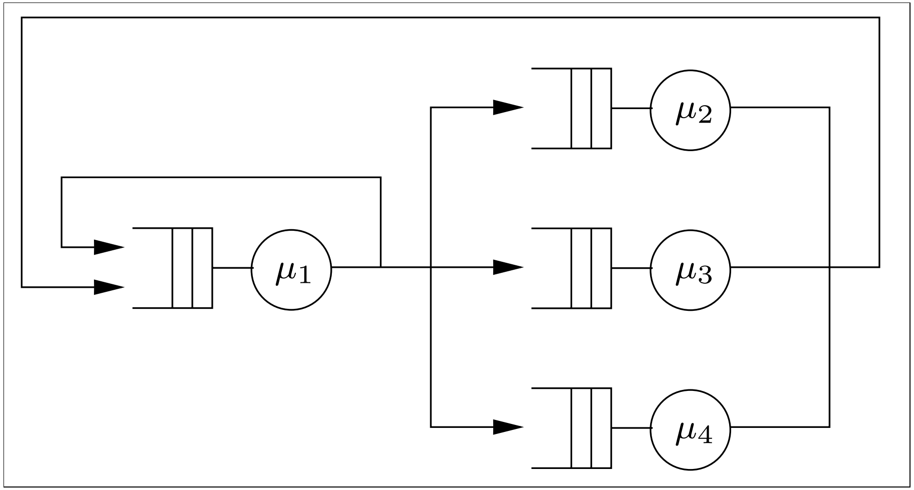
mit:

$$\pi_i(0 \mid k) = 1 - \frac{1}{m_i} \cdot \left(\frac{e_i \cdot \lambda(k)}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{m_i - 1} (m_i - j) \cdot \pi_i(j \mid k) \right)$$

und den Anfangsbedingungen:

$$\pi_i(0 \mid 0) = 1, \quad \pi_i(j \mid 0) = 0$$

◆ Beispiel:



- Anzahl der Knoten: $N = 4$
- Anzahl der Aufträge: $K = 6$
- Knotentyp für alle Knoten: M/M/1- FCFS
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = 1;\ e_2 = 0.4;\ e_3 = 0.2;\ e_4 = 0.1$
- Bedienraten: $\mu_1 = 50;\ \mu_2 = 5;\ \mu_3 = 2.5;\ \mu_4 = 1.667$

- ***Schritt*** 1: Initialisierung:

$$\overline{K}_1(0) = \overline{K}_2(0) = \overline{K}_3(0) = \overline{K}_4(0) = 0$$

- ***Schritt*** 2: Iteration über die Anzahl der Aufträge:

Iteration für ***k*** = 1:

➤ *Schritt* 2.1: Mittlere Antwortzeit (Ankunftstheorem):

$$\overline{T}_1(1) = \frac{1}{\mu_1}\left[1 + \overline{K}_1(0)\right] = \underline{0.02}\,, \quad \overline{T}_2(1) = \frac{1}{\mu_2}\left[1 + \overline{K}_2(0)\right] = \underline{0.2}\,,$$
$$\overline{T}_3(1) = \frac{1}{\mu_3}\left[1 + \overline{K}_3(0)\right] = \underline{0.4}\,, \quad \overline{T}_4(1) = \frac{1}{\mu_4}\left[1 + \overline{K}_4(0)\right] = \underline{0.6}\,.$$

➤ *Schritt* 2.2: Durchsatz (Little):

$$\lambda(1) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{4} e_i \overline{T}_i(1)} = \underline{4.167}$$

➤ *Schritt* 2.3: Mittlere Anzahl der Aufträge (Little):

$$\overline{K}_1(1) = \lambda(1)\overline{T}_1(1)e_1 = \underline{0.083}\,, \quad \overline{K}_2(1) = \lambda(1)\overline{T}_2(1)e_2 = \underline{0.333}\,,$$
$$\overline{K}_3(1) = \lambda(1)\overline{T}_3(1)e_3 = \underline{0.333}\,, \quad \overline{K}_4(1) = \lambda(1)\overline{T}_4(1)e_4 = \underline{0.25}\,.$$

Iteration für ***k*** = 2:

➤ *Schritt* 2.1: Mittlere Antwortzeit:

$$\overline{T}_1(2) = \frac{1}{\mu_1}\left[1 + \overline{K}_1(1)\right] = \underline{0.022}\,, \quad \overline{T}_2(2) = \frac{1}{\mu_2}\left[1 + \overline{K}_2(1)\right] = \underline{0.267}\,,$$
$$\overline{T}_3(2) = \frac{1}{\mu_3}\left[1 + \overline{K}_3(1)\right] = \underline{0.533}\,, \quad \overline{T}_4(2) = \frac{1}{\mu_4}\left[1 + \overline{K}_4(1)\right] = \underline{0.75}\,.$$

➤ *Schritt* 2.2: Durchsatz:

$$\boldsymbol{\lambda(2) = \frac{2}{\sum_{i=1}^{4} e_i \overline{T}_i(2)} = \underline{6.452}}$$

➤ *Schritt* 2.3: Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\boldsymbol{\overline{K}_1(2) = \lambda(2)\overline{T}_1(2)e_1 = \underline{0.140}\,, \quad \overline{K}_2(2) = \lambda(2)\overline{T}_2(2)e_2 = \underline{0.688}\,,}$$
$$\boldsymbol{\overline{K}_3(2) = \lambda(2)\overline{T}_3(2)e_3 = \underline{0.688}\,, \quad \overline{K}_4(2) = \lambda(2)\overline{T}_4(2)e_4 = \underline{0.484}\,.}$$

$$\vdots$$

➤ Nach 6 Iterationsschritten erhält man:

Node	1	2	3	4
Mean response time $\overline{T}_i$	0.025	0.570	1.140	1.244
Throughput λ_i	9.920	3.968	1.984	0.992
Mean number of jobs $\overline{K}_i$	0.244	2.261	2.261	1.234
Utilization ρ_i	0.198	0.794	0.794	0.595

■ Mittelwertanalyse für WS-Netze mit mehreren Auftragsklassen:

$$\overline{T}_{ir}(\mathrm{k}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{ir}} \left[1 + \sum\limits_{s=1}^{R} \overline{K}_{is}(\mathrm{k} - \mathbf{1}_r) \right] & \text{Type-1,2,4 } (m_i = 1), \\ \dfrac{1}{\mu_{ir} \cdot m_i} \left[1 + \sum\limits_{s=1}^{R} \overline{K}_{is}(\mathrm{k} - \mathbf{1}_r) \right. & \\ \qquad \left. + \sum\limits_{j=0}^{m_i - 2} (m_i - j - 1) \pi_i(j \mid \mathrm{k} - \mathbf{1}_r) \right], & \text{Type-1 } (m_i > 1), \\ \dfrac{1}{\mu_{ir}}, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

- Mittelwertanalyse für WS-Netze mit lastabhängigen Bedienraten:

$$\overline{T}_i(k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{\mu_i(j)} \pi_i(j-1 \mid k-1)$$

mit:

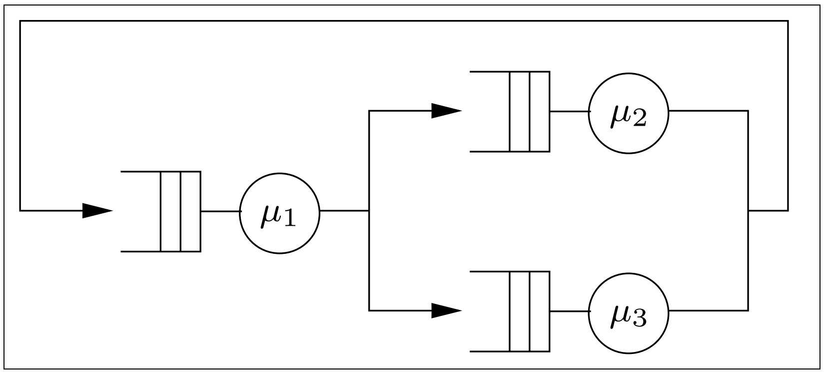
$$\pi_i(j \mid k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(k)}{\mu_i(j)} \pi_i(j-1 \mid k-1) e_i\,, & \text{for } j = 1, \ldots, k, \\ 1 - \displaystyle\sum_{l=1}^{k} \pi_i(l \mid k)\,, & \text{for } j = 0. \end{cases}$$

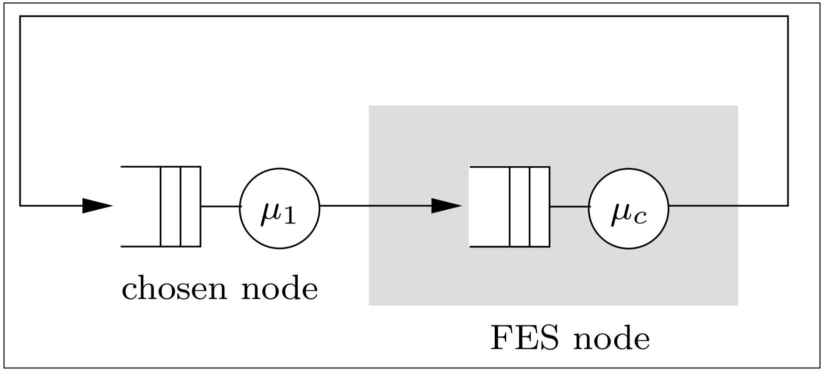
FES-Methode (Flow-Equivalent-Server-Methode):

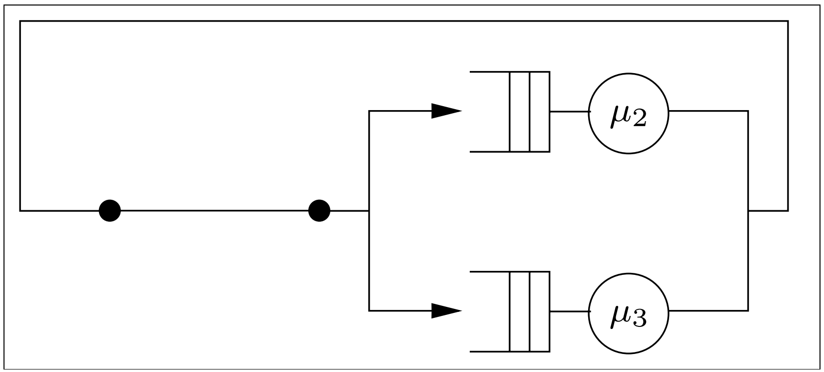
◆ **Algorithmus**:

- ***Schritt*** 1:

In the given network, choose a node $\boldsymbol{i}$ and short-circuit it by setting the mean service time in that node to zero. Compute the throughputs $\boldsymbol{\lambda_i^{\mathrm{sc}}(k)}$ along the short circuit, as a function of the number of jobs $\boldsymbol{k = 1, \ldots, K}$ in the network. For this computation, any of the earlier solution algorithms for product-form queueing networks can be used.




μ_1
μ_c
chosen node
FES node


μ_2
μ_3

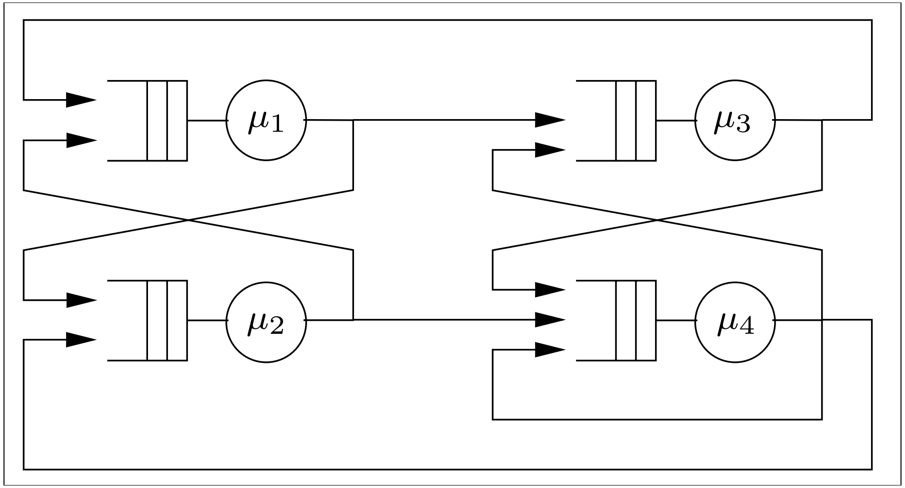
- ***Schritt*** 2:

  From the given network, construct an equivalent reduced network consisting only of the chosen node $\boldsymbol{i}$ and the FES node $\boldsymbol{c}$. The visit ratios in both nodes are $\boldsymbol{e_i}$. The load-dependent service rate of the FES node is the throughput along the short-circuit path when there are $\boldsymbol{k}$ jobs in the network, that is: $\boldsymbol{\mu_c(k) = \lambda_i^{\mathrm{sc}}(k)}$ for $\boldsymbol{k = 1, \ldots, K}$.

- ***Schritt*** 3:

  Compute the performance measures in the reduced network with any suitable algorithm for product-form networks (e.g., convolution or MVA).

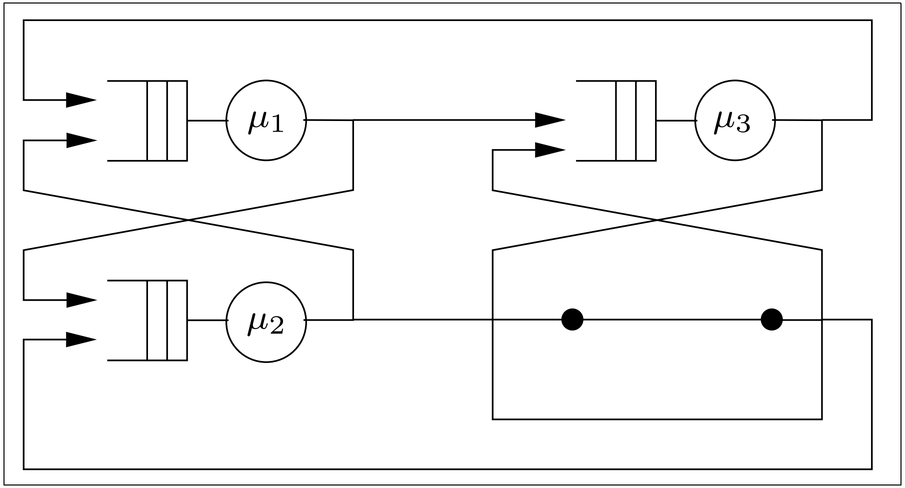
◆ **Beispiel**:



- Anzahl der Aufträge: $K = 2$
- Bedienraten: $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 3$; $\mu_4 = 4$
- Besuchshäufigkeiten: $e_1 = e_2 = e_3 = 1$; $e_4 = 1.25$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{12} = 0.5\,, \quad p_{21} = 0.5\,, \quad p_{31} = 0.5\,, \quad p_{42} = 0.4\,,$$
$$p_{13} = 0.5\,, \quad p_{24} = 0.5\,, \quad p_{34} = 0.5\,, \quad p_{43} = 0.4\,, \quad p_{44} = 0.2\,.$$

- ***Schritt*** 1:



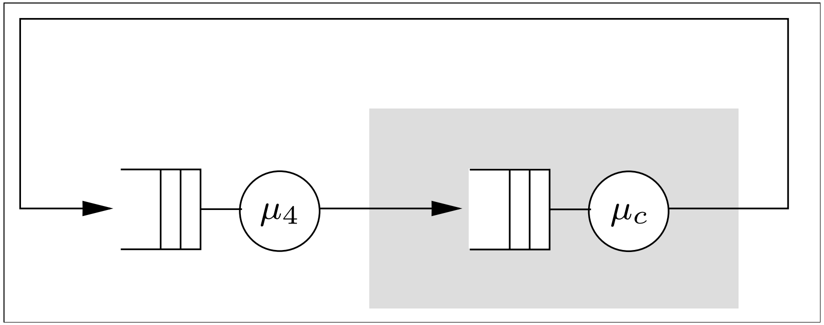
mit der Mittelwertanalyse erhält man:

$$\boldsymbol{\lambda(1) = \underline{0.545}\,, \quad \lambda(2) = \underline{0.776}}$$

und mit e_4 = 1.25 für den Kurzschluss:

$$\boldsymbol{\lambda_4^{sc}(1) = \underline{0.682}\,, \quad \lambda_4^{sc}(2) = \underline{0.971}}$$

- ***Schritt*** 2: Reduziertes WS-Netz (Reduced Network):



Es gilt:

$$\boldsymbol{\mu_c(1) = \lambda_4^{sc}(1) = 0.682\,, \quad \mu_c(2) = \lambda_4^{sc}(2) = 0.971}$$

und:

$$e_4 = e_c = 1.25$$

- ***Schritt*** 3: Anwendung der lastabhängigen Mittelwertanalyse:

$$\boldsymbol{\overline{T}_4(2) = \underline{0.286}}$$

$$\boldsymbol{\overline{K}_4(2) = \underline{0.253}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_4(2) = \underline{0.885}}$$

:

◆ **Erweiterung der FES-Methode:**

➤ Es wird nicht nur ein einzelner Knoten betrachtet, sondern ein Teilnetzwerk aus mehreren Knoten und der Rest des WS-Netzes wird wieder zu einem FES-Knoten zusammengefasst.