- Zusammenstellung wichtiger Formeln:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$\overline{K} = \lambda \overline{T},$$

$$\overline{Q} = \lambda \overline{W}$$

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu}$$

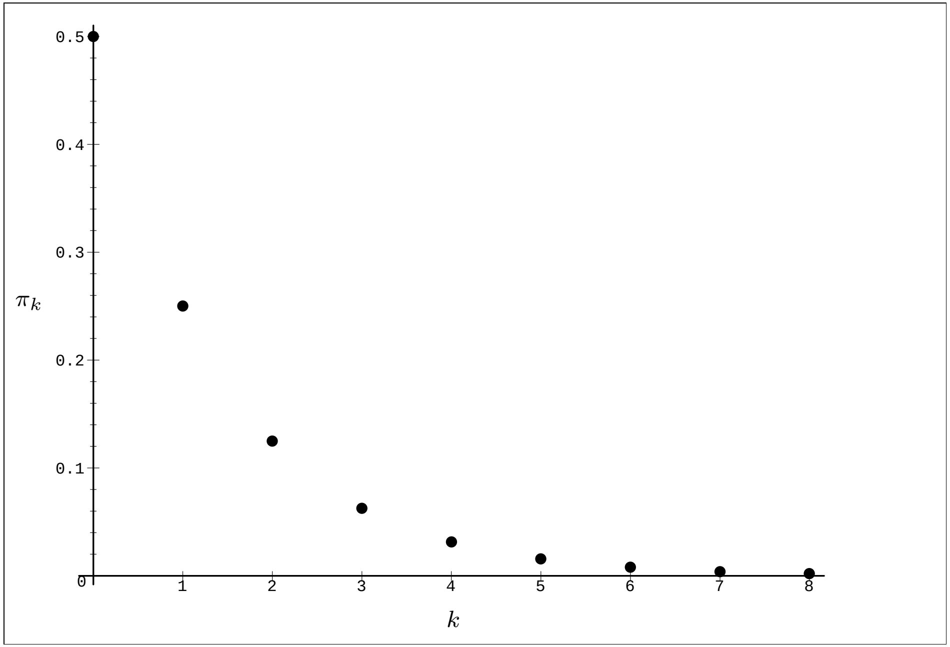
$$\overline{K} = \overline{Q} + m\rho$$

$$\overline{K} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_k$$

D.4 FIFO-Systeme

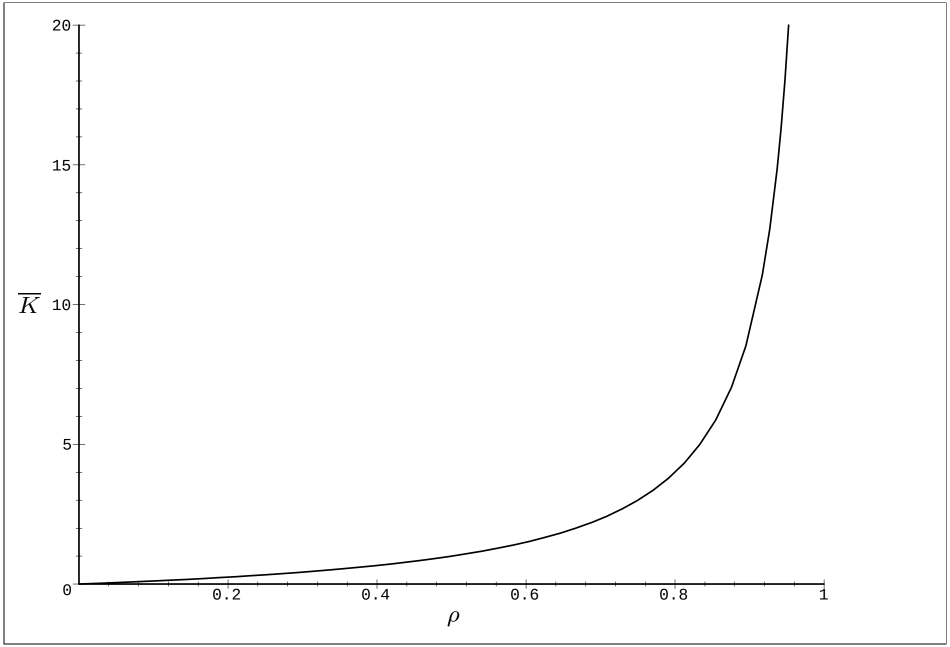
1 M/M/1

Zustandswahrscheinlichkeit: $\pi_k = (1-\rho)\rho^k$



➤ Mittlere Anzahl der Aufträge $\overline{K}$:

$$\overline{K} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$



➤ Varianz der Anzahl der Aufräge:

$$\sigma_K^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

➤ Variationskoeffizient der Anzahl der Aufträge:

$$c_K = \frac{\sigma_K}{\overline{K}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

➤ Verteilung der Antwortzeit:

$$F_T(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu(1-\rho)x}$$

➤ Varianz der Antwortzeit:

$$\mathrm{var}(T) = \frac{1}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

2 M/M/m

- Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!}, & 0 \le k \le m \\[2ex] \pi_0 \dfrac{\rho^k m^m}{m!}, & k \ge m\,, \end{cases}$$

mit:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

➤ Wartewahrscheinlichkeit P_m :

$$P_m = P(K \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} \pi_k$$
$$= \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \cdot \pi_0$$

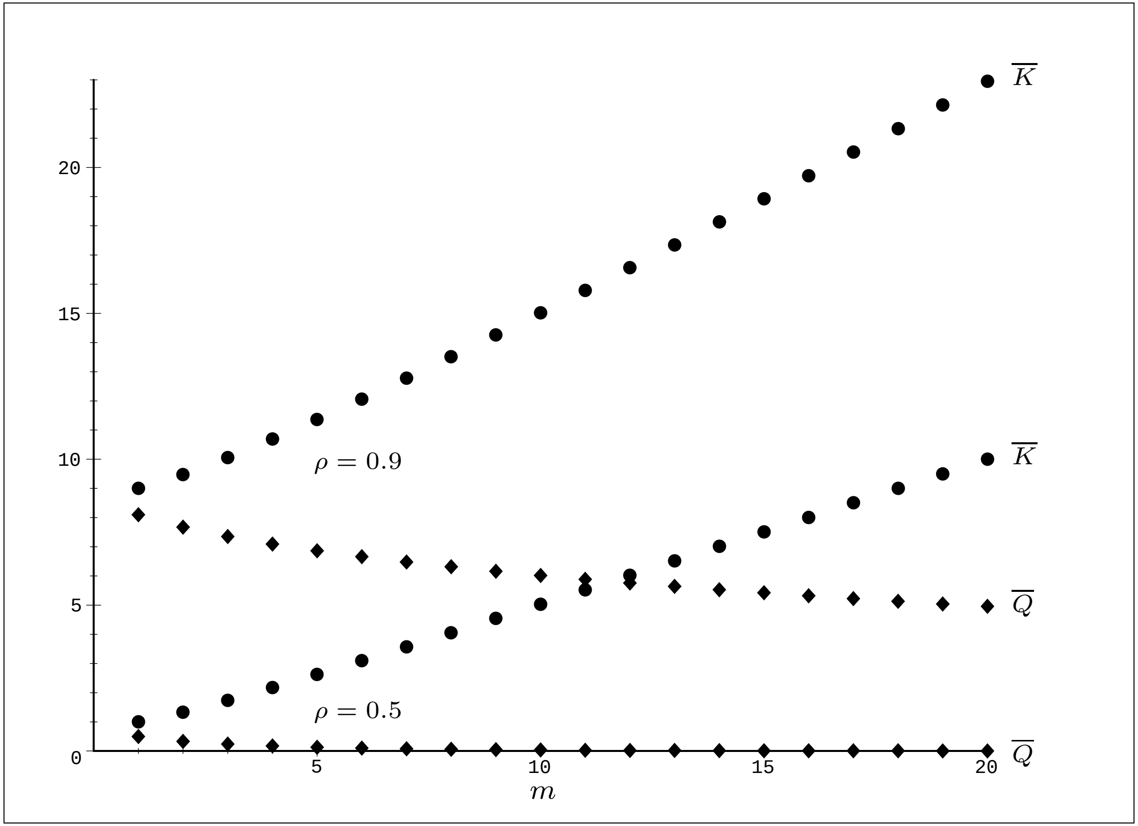
➤ Mittlere Anzahl der Aufträge $\overline{K}$:

$$\overline{K} = m\rho + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot P_m$$

➤ Wartezeitverteilung:

$$F_W(x) = \begin{cases} 1 - P_m\,, & x = 0\,, \\ 1 - P_m \cdot \mathrm{e}^{-m\mu(1-\rho)x}\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

➤ Mittlere Warteschlangenlänge und mittlere Anzahl der Aufträge als Funktion der Anzahl der Bedieneinheiten:



3 M/M/oo-IS (Infinite Server)

- Infinite Server bedeutet, daß immer mindestens genausoviele Bedieneinheiten (Server) vorhanden sind wie Aufträge im System sind
- Es muß daher nie gewartet werden
- Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

- Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Mittlere Antwortzeit = Mittlere Bedienzeit:

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu}$$

4 M/M/1/K Finite Capacity

- WS hat endliche Kapazität
- Es können maximal K Aufträge im Wartesystem sein
- Ein ankommender Auftrag geht verloren, wenn die WS voll ist
- Zustandswahrscheinlichkeit (a = λ/μ):

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{(1-a)a^k}{1-a^{K+1}}\,, & 0 \le k \le K\,, \\ 0\,, & k > K\,. \end{cases}$$

- Für λ = μ (a = 1):

$$\pi_0 = \frac{1}{K+1} = \pi_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

➤ Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-a} - \dfrac{K+1}{1-a^{K+1}} \cdot a^{K+1}, & a \neq 1, \\ \dfrac{K}{2}, & a = 1. \end{cases}$$

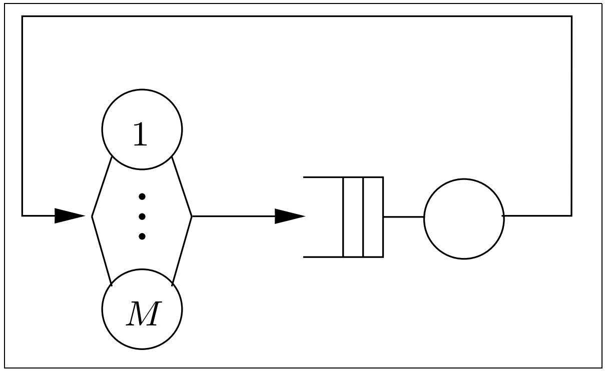
➤ Auslastung:

$$\rho = 1 - \pi_0 \neq \lambda/\mu$$

➤ Durchsatz:

$$\lambda(1 - \pi_K) \neq \lambda$$

5 Machine-Repairman-Model



- ➤ Modell für die Reparatur von M Maschinen durch einen "Repairman"
- ➤ Modell für ein Terminalsystem mit M Terminals und einem Rechner
- ➤ Geschlossenes Warteschlangennetz mit M Aufträgen
- ➤ Bedienrate des Repairman: μ
- ➤ Ausfallrate einer Maschine: λ

➤ Zustandswahrscheinlichkeit (*P(k Reparaturaufträge beim Repairman)*):

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!}$$

mit:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{M!}{(M-k)!}}$$

➤ Auslastung des Repairman:

$$\rho = (1 - \pi_0)$$

➤ Durchsatz:

$$\mu(1 - \pi_0)$$

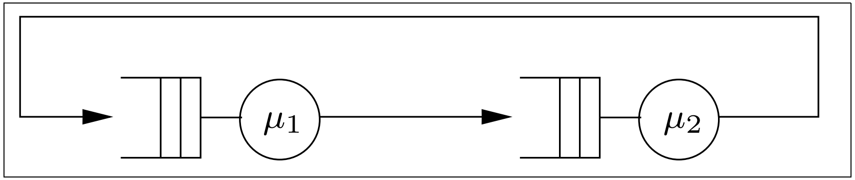
➤ Mittlere Antwortzeit (Mittlere Zeit bis zur Wiederherstellung der Betriebsfähigkeit einer Maschine):

$$\overline{T} = \frac{M}{\mu(1-\pi_0)} - \frac{1}{\lambda}$$

➤ Mittlere Anzahl der Aufträge, mittl. Anzahl der defekten Maschinen (mit Little's Gesetz):

$$\overline{K} = M - \frac{\mu(1-\pi_0)}{\lambda}$$

6 Tandem-Netzwerk



- Geschlossenes Netz mit K Aufträgen

- Zustand des Systems: (k_1, k_2)

  mit:

  - k_1: Anzahl der Aufträge in Knoten 1

  - k_2: Anzahl der Aufträge in Knoten 2

  - $k_1 + k_2 = K$

➤ Zustandswahrscheinlichkeit für Knoten 1 (*P(k_1 Aufträge in Knoten* 1)):

$$\pi_1(k_1) = \pi_1(0) \cdot \frac{1}{u^{k_1}}\,,$$

$$\pi_1(0) = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{1}{u}}{1-\left(\frac{1}{u}\right)^{K+1}}\,, & u \neq 1\,, \\ \dfrac{1}{K+1}\,, & u = 1\,. \end{cases}$$

mit:

$$u = \mu_1/\mu_2$$

➤ Zustandswahrscheinlichkeit für Knoten 2 (*P(k_2 Aufträge in Knoten 2)*):

$$\pi_2(k_2) = \pi_2(0) \cdot u^{k_2} ,$$

$$\pi_2(0) = \begin{cases} \dfrac{1-u}{1-u^{K+1}} , & u \neq 1 , \\ \dfrac{1}{K+1} , & u = 1 . \end{cases}$$

➤ Auslastung von Knoten1 und Knoten 2:

$$\rho_1 = 1 - \pi_1(0) , \qquad \rho_2 = 1 - \pi_2(0)$$

➤ Durchsatz:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1 \mu_1 = \rho_2 \mu_2$$

➤ Mittlere Anzahl von Aufträgen:

$$\overline{K}_2 = \frac{u}{1-u} - \frac{(K+1)\cdot u^{K+1}}{1-u^{K+1}}, \quad u \neq 1,$$

$$\overline{K}_1 = K - \overline{K}_2$$

7 M/G/1

◆ System ist gegeben durch:

➤ Zwischenankunftszeit exponentiell verteilt mit $\overline{T}_A = 1/\lambda$

➤ Bedienzeit beliebig verteilt mit:

➤ Mittelwert: $\overline{T}_B = 1/\mu$

➤ Variationskoeffizient: c_B

➤ Zahl der Bedieneinheiten: $m = 1$

➤ Warteschlangenstrategie: FCFS

- Die mittlere Wartezeit eines Auftrages setzt sich zusammen aus den folgenden zwei Komponenten:
  - Die mittlere Restbedienzeit $\overline{W}_0$ des Auftrages in der Bedieneinheit
  - Die Summe der Bedienzeiten der Aufträge in der Warteschlange

Damit ergibt sich:

$$\overline{\boldsymbol{W}} = \overline{\boldsymbol{W}}_{\mathbf{0}} + \overline{\boldsymbol{Q}} \cdot \overline{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}}$$

Und daraus mit Little's Gesetz: $\overline{Q} = \lambda\overline{W}$ und $\rho = \lambda/\mu$

$$\overline{\boldsymbol{W}} = \frac{\overline{\boldsymbol{W}}_{\mathbf{0}}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\rho}}$$

◆ Die mittlere Restbedienzeit $\overline{W}_0$ ergibt sich aus:

$$\overline{W}_0 = P(\text{Bedieneinheit ist aktiv}) \cdot \overline{R} + P(\text{Bedieneinheit ist leer}) \cdot 0$$

mit der mittleren Restbedienzeit $\overline{R}$ einer aktiven Bedieneinheit (die mittlere Restbedienzeit der leeren Bedieneinheit ist natürlich 0):

$$\overline{R} = \frac{\overline{T_B^2}}{2\overline{T}_B} = \frac{\overline{T}_B}{2}(1 + c_B^2)$$

Für ein M/M/1- System (c_B = 1) ergibt sich daraus:

$$\overline{R}_{\mathrm{M/M/1}} = \overline{T}_B = \frac{1}{\mu}$$

- Insgesamt ergibt sich damit für die mittlere Warteschlangenlänge (wieder mit dem Satz von Little $\overline{Q} = \lambda\overline{W}$):

$$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \cdot \frac{(1+c_B^2)}{2}$$

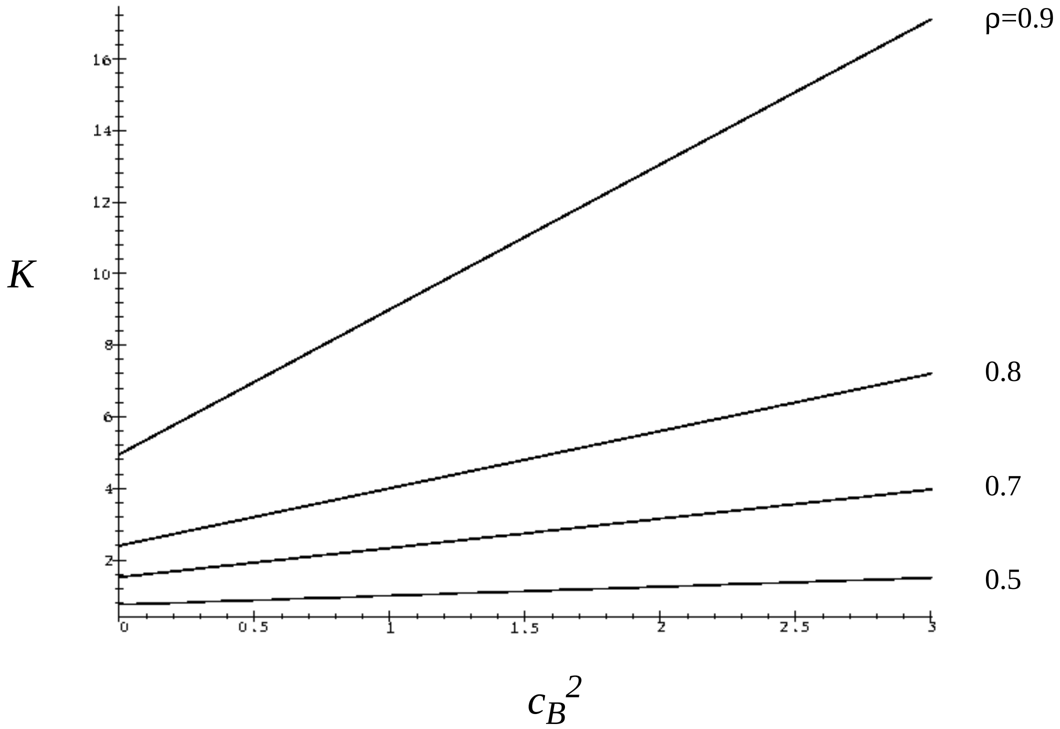
Pollaczek-Khintchine-Formel für die mittlere Warteschlangenlänge eines M/G/1-Systems

Für M/M/1 - Systeme (c_B = 1) und M/D/1 - Systeme (c_B = 0) ergibt sich:

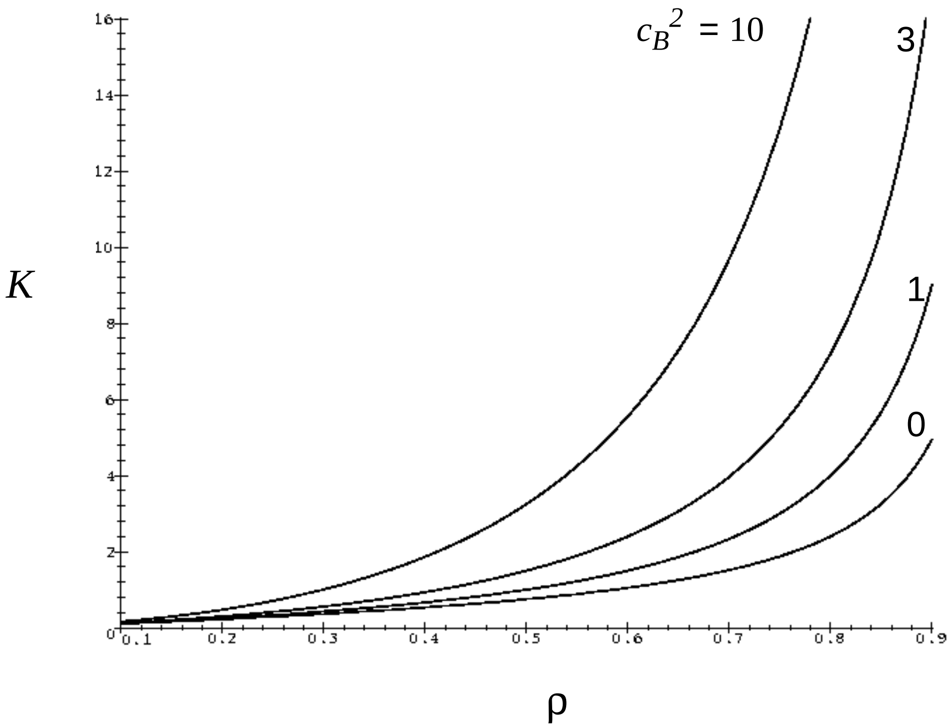
$$\overline{Q}_{\mathrm{M/M/1}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\overline{Q}_{\mathrm{M/D/1}} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\,.$$

➤ Mittlere Anzahl der Aufträge in Abhängigkeit vom Variationskoeffizienten:



- Mittlere Anzahl der Aufträge in Abhängigkeit von der Auslastung ρ:



8 G/M/1

◆ System ist gegeben durch:

➤ Bedienzeit exponentiell verteilt mit $\overline{T}_B = 1/\mu$

➤ Zahl der Bedieneinheiten: $m = 1$

➤ Zwischenankunftszeit beliebig verteilt mit:

➤ Mittelwert: $\overline{T}_A = 1/\lambda$

➤ Variationskoeffizient: c_A

➤ Warteschlangenstrategie: FCFS

➤ Parameter σ:

$$\sigma = A^{\sim}(\mu - \mu\sigma)$$

$A^{\sim}$: Laplacetransformierte der Dichte der Zwischenankunftszeit

➤ Mittlere Anzahl der Aufträge:

$$\overline{K} = \frac{\rho}{1 - \sigma}$$

➤ Zustandswahrscheinlichkeit:

$$\pi_k = \rho(1 - \sigma)\sigma^{k-1}, \quad k > 0$$
$$\pi_0 = 1 - \rho\,,$$

- Beispiel: M/M/1 - System:

$$A^{\sim}(s) = \lambda / (s + \lambda)$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

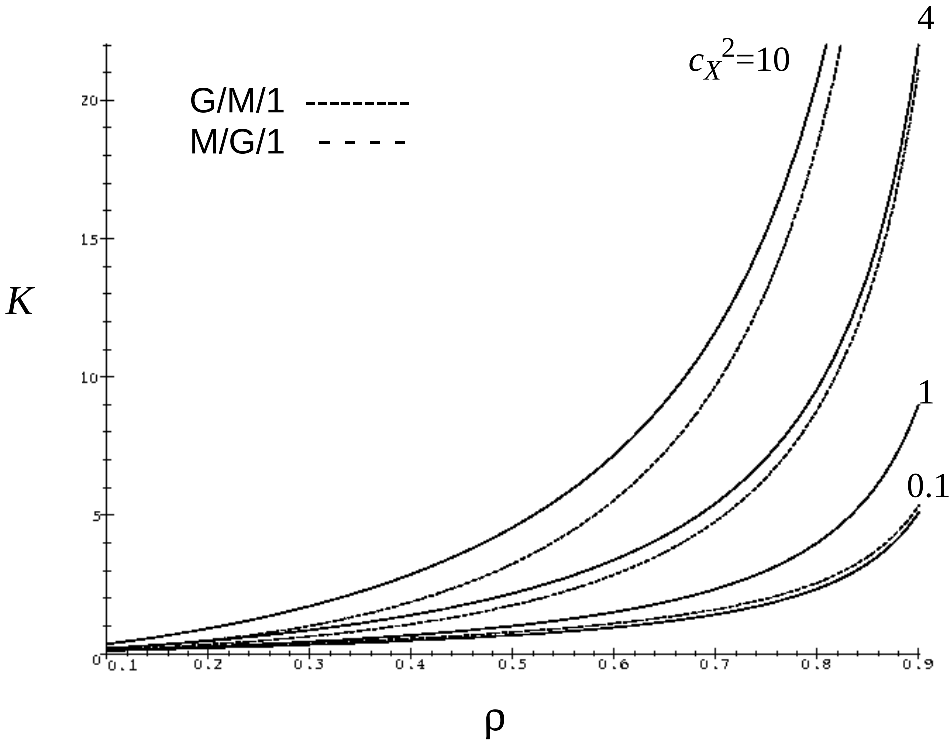
- Beispiel: E_2/M/1 - System

$$A^{\sim}(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda}\right)^2$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma = \rho + \frac{1}{2} - \sqrt{\rho - \frac{1}{4}}$$

◆ Mittlere Anzahl der Aufträge für ein M/G/1- und ein G/M/1- System:



9 G/G/1

- Bedienzeit und Zwischenankunftszeit sind nicht exponentiell verteilt
- Es existieren keine exakten Ergebnisse
- Für die mittlere Wartezeit sind die Ergebnisse für M/G/1 bzw. G/M/1 untere bzw. obere Grenzen, siehe Tabelle:

c_A^2	c_B^2	M/G/1	GI/M/1
> 1	> 1	LB	LB
> 1	< 1	LB	UB
< 1	> 1	UB	LB
< 1	< 1	UB	UB

LB: Lower Bound

UB: Upper Bound

➤ Allen-Cunneen-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

$$\overline{W} \approx \frac{\rho/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2}$$

Exakt für M/M/1 und M/G/1

➤ Krämer/Langenbach-Belz-Approximationsformel (sehr genau):

$$\overline{W} \approx \frac{\rho/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2} \cdot G_{\mathrm{KLB}}$$

$$G_{\mathrm{KLB}} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{(1-c_A^2)^2}{c_A^2 + c_B^2}\right), & 0 \le c_A \le 1 \\ \exp\left(-(1-\rho)\frac{c_A^2 - 1}{c_A^2 + 4c_B^2}\right), & c_A > 1 \end{cases}$$

10 M/G/m

➤ Allen-Cunneen-Approximationsformel:

$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{(1+c_B^2)}{2m}$$

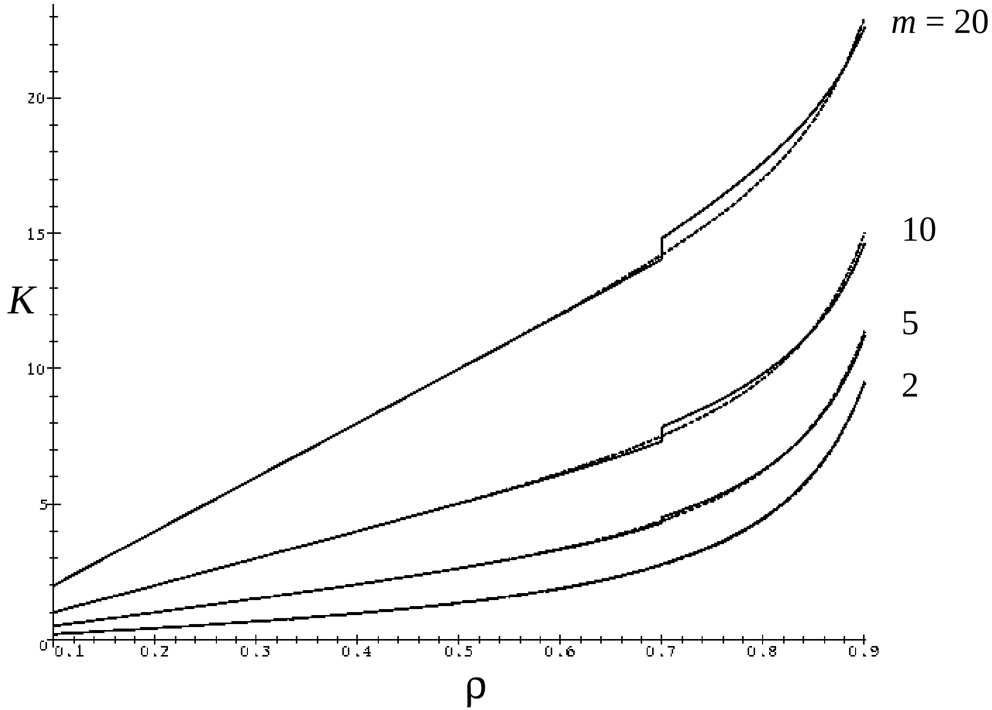
Approximation für die Wartewahrscheinlichkeit $P_{m,M/M/m}$, oder:

$$P_m \approx \begin{cases} \dfrac{\rho^m + \rho}{2}, & \rho > 0.7\,, \\ \rho^{\frac{m+1}{2}}, & \rho < 0.7\,. \end{cases}$$

m = 5:

ρ	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$P_{m_{\mathrm{ex}}}$	0	0.06	0.23	0.38	0.55	0.76	0.88	0.97
$P_{m_{\mathrm{app}}}$	0	0.06	0.21	0.34	0.56	0.75	0.86	0.97

Mittlere Anzahl der Aufträge für ein M/M/m - System mit $P_{m,ex}$ und $P_{m.appr}$.



11 G/G/m

➤ Allen-Cunneen-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

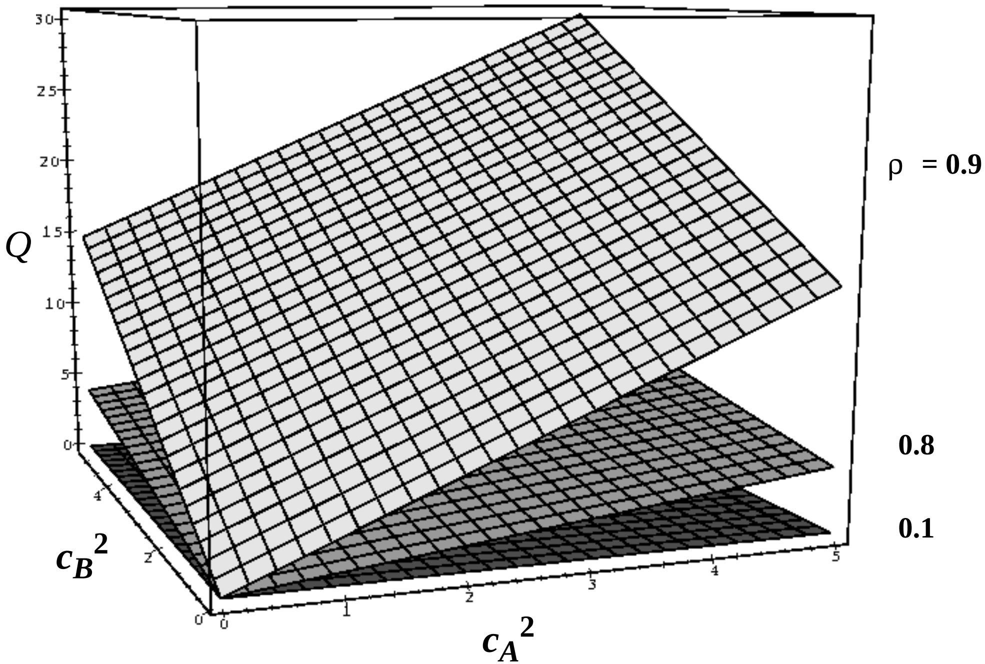
$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2m}$$

➤ Krämer/Langenbach-Belz-Approximationsformel für die mittlere Wartezeit:

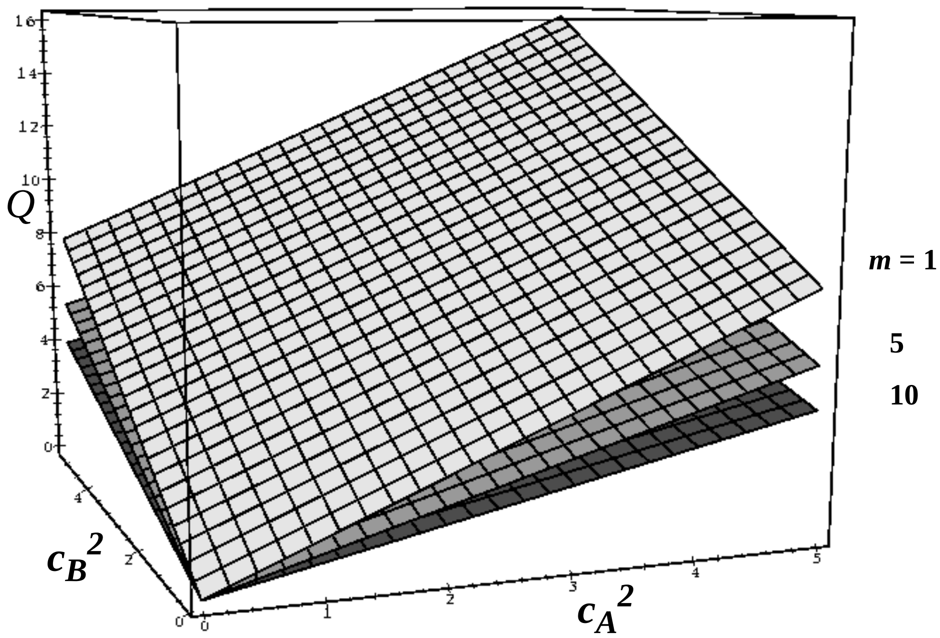
$$\overline{W} \approx \frac{P_m/\mu}{1-\rho} \cdot \frac{c_A^2 + c_B^2}{2m} \cdot G_{\mathrm{KLB}}$$

➤ Für den Korrekturfaktor G_{KLB} gilt:

$$G_{\mathrm{KLB}} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{1-\rho}{P_m}\frac{(1-c_A^2)^2}{c_A^2+c_B^2}\right), & 0 \le c_A \le 1 \\ \exp\left(-(1-\rho)\frac{c_A^2-1}{c_A^2+4c_B^2}\right), & c_A > 1, \end{cases}$$



- Mittlere Warteschlangenlänge $\overline{Q}$ eines G/G/10-Sytems



- Mittlere Warteschlangenlänge $\overline{Q}$ eines G/G/m-Systems mit $\rho = 0.8$