4.2 Die analytische Methode

4.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Ist X eine zufällige Größe, so bezeichnet P[X<x] die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig beobachteter Wert von X kleiner als x ist. Im weiteren wird stets vorausgesetzt, daß P[X<0] = 0 ist.

Unter der Verteilungsfunktion einer zufälligen Größe X wird die Funktion F(x) mit P[X<x] = F(x) verstanden,

unter der Dichte die Funktion $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$.

Unter dem n-ten Moment $E[X^n]$ einer zufälligen Größe X wird der Wert $\int_0^\infty x^n dF(x)$ verstanden. Das erste Moment wird auch als Mittelwert von X bezeichnet.

P[X<x | B(X)] bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis, das die Bedingung B erfüllt, einen Wert kleiner als x hat.

S4.8 Satz: Gedächtnislosigkeit und Exponentialverteilung

Eine Folge zufälliger Ereignisse habe die Eigenschaft gedächtnislos zu sein, d. h. daß für hinreichend kleine Zeitintervalle Δt in einem Intervall höchstens ein Ereignis eintritt und zwar mit der von t unabhängigen Wahrscheinlichkeit $\lambda(\Delta t) + o(\Delta t)$. Dann gilt für die Zeitintervalle X zwischen zwei Ereignissen:

$P[X<x] = 1-e^{-\lambda x}$ (*Exponential-Verteilung*).

Für Exponentialverteilungen ist $E[X] = 1/\lambda$ und $E[X^2] = 2/\lambda^2$.

S4.9 Satz

Für Exponentialverteilungen gilt: $P[X < x_0+x \mid X \geq x_0] = P[X < x]$.

S4.10 Satz: Poisson-Verteilung

Für eine Ereignisfolge mit exponentieller Verteilung $1-e^{-\lambda x}$ der Intervalle zwischen zwei Ereignissen, kurz als Zwischenintervalle bezeichnet, gilt für die Zahl N(t) der im Intervall [0, t) eintretenden Ereignisse:

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad \text{(\textit{Poisson-Verteilung})}.$$

S4.11 Satz: Zusammenführung und Trennung von Exponentialverteilungen

1. Führt man n Ereignisfolgen mit Zwischenintervallverteilungen $1 - e^{-\lambda_i t}$ $(1 \leq i \leq n)$ zu einer einzigen Ereignisfolge zusammen, so entsteht eine Ereignisfolge mit Zwischenintervallverteilung $1 - e^{-\lambda t}$, wobei $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ist.
2. Teilt man eine Ereignisfolge mit Zwischenintervallverteilung $1 - e^{-\lambda t}$ in der Art in n Ereignisfolgen auf, daß die Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit β_i in die i-te Folge eingereiht werden, so sind die Zwischenintervalle in der i-ten Ereignisfolge gemäß $1 - e^{-\beta_i \lambda t}$ verteilt.

D4.1 Definition: Laplace- bzw. Z-Transformierte

1. Die *Laplace-Transformierte* $F^*(z)$ einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion F(t) mit der Dichtefunktion $f(t) = F'(t)$ ist definiert durch
$$F^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dF(t) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt .$$
2. Die *Z-Transformierte* $X^*(z)$ einer diskreten Verteilung $p_j = P[X=j]$ ist definiert durch
$$X^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j .$$

S4.12 Satz

Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige, nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen $F_j(x)$ und sei $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ mit Verteilungsfunktion F(x).

Dann gilt sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Fall: $F^*(z) = \prod_{i=1}^{n} F_i^*(z)$

S4.13 Satz

Eine Verteilungsfunktion ist eindeutig durch ihre Transformierte bestimmt und umgekehrt.

4.2.2 Einfache Modelle

Kendallsche Notation

Ankunftsintervallverteilung / Bedienzeitverteilung / #Bedieneinheiten - Auswahlstrategie

Kennbuchstaben für Verteilungen

- **M Exponentialverteilung**
- **G allgemeine Verteilung**

Beispiel

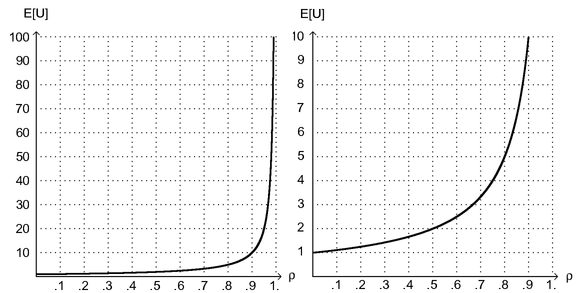
M/M/1-FCFS

System mit einer Bedieneinheit, wobei Ankunftsintervalle und Bedienzeiten exponentiell verteilt sind und die Aufträge in der Reihenfolge ihrer Ankunft (First Come First Served) abgearbeitet werden.

S4.14 Satz: M/M/1-FCFS

Sind in einem System mit einer Bedienstation die Ankunftsintervalle gemäß $1 - e^{-\lambda t}$ und die Bedienzeiten gemäß $1 - e^{-\mu t}$ verteilt, so gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen bei Verwendung der Strategie 'first-come-first-served':

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{mit } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

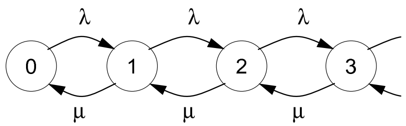


Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M/M/1-FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

Beweis

Systemzustand charakterisiert durch Zahl der im System befindlichen Aufträge.

Übergangswahrscheinlichkeiten



Daraus folgt:

$$p_0\lambda = p_1\mu$$

$$p_{i-1}\lambda + p_{i+1}\mu = p_i(\lambda + \mu) \text{ für } i \ge 1$$

Betrachtung der Z-Transformierten führt zu

$$P^*(z) = \frac{\mu p_0 - \frac{\mu}{z}p_0}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{z} - \lambda z} = p_0\frac{1}{1-\rho z}$$

Wegen $P^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ folgt $p_0 = 1 - \rho$.

Einsetzung ergibt $P^*(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$ und somit

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = P^{*\prime}(z)\big|_{z=1} = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho z)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

S4.15 (M/M/k-FCFS)

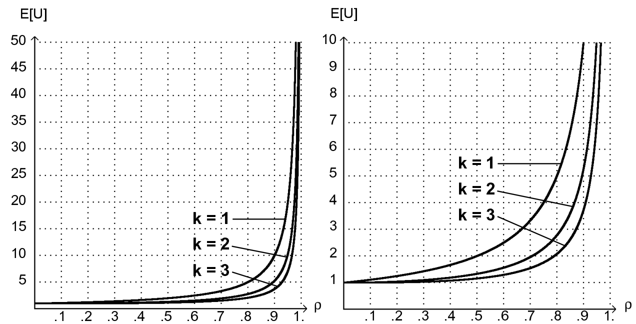
Es sei ein System mit einer Warteschlange und k identischen Bedienstationen gegeben so, daß jede Station jeden Auftrag in der gleichen Zeit abwickeln kann. Die Ankunftsintervalle seien gemäß $1 - e^{-\lambda x}$ verteilt und die Bedienzeiten gemäß $1 - e^{-\mu x}$. Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'.

Dann gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen:

$$E[N] = k\rho + p_0 \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2}$$

$$\text{mit } p_0 = \left(\frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} \right)^{-1}$$

und $\rho = \lambda/(k\mu)$.



Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M/M/k-FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

S4.16 (M/G/1-FCFS; Pollaczek/Khinchine-Formel)

Es sei ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation gegeben. Die Ankunftsintervalle seien gemäß $1 - e^{-\lambda x}$ und die Bedienzeiten beliebig verteilt. Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'.

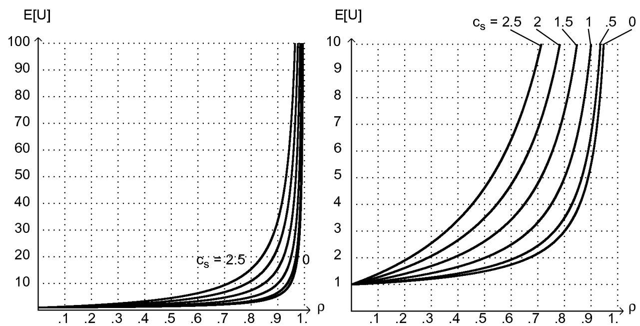
Bezeichnet man mit S die Zufallsvariable der Bedienzeiten, so gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen:

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} \quad \text{mit } \rho = \lambda E[S] .$$

Definiert man den *Variationskoeffizienten* c_s durch $c_s = (VAR[S])^{1/2}/(E[S])$, wobei $VAR[S] = E[S^2] - E[S]^2$ die Varianz der Bedienzeitverteilung ist, so erhält man unter Verwendung des Theorems von Little

$$E[U] = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\rho(1+c_s^2)}{2(1-\rho)}\right) \text{ mit } \mu = \frac{1}{E[S]} .$$

Für Exponentialverteilungen hat c_s den Wert 1.



Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M/G/1-FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)

Die analytische Methode: Restrechenzeit in einem M/G/1-FCFS-System

S4.17 Satz: M/G/1-FCFS

In einem M/G/1-System, das nach der Strategie FCFS arbeitet, sei S die Zufallsvariable der Bedienzeit und R die Zufallsvariable für die Zeit, die ein zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt t_0 die Bedienstation belegender Auftrag noch benötigt, um seinen gesamten Bedienwunsch abzuwickeln. Ist die Bedienstation zum Zeitpunkt t_0 frei, so werde R = 0 gesetzt. Dann gilt:

$$\mathbf{E[R]} = \frac{\lambda}{2}E[S^2] = \frac{\rho}{2}\frac{E[S^2]}{E[S]} .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei FCFS

4.2.3 Wartezeiten in Abhängigkeit von der geforderten Bedienzeit

Die Strategie FCFS

Wird ein M/G/1 System nach FCFS abgearbeitet, so gilt nach Satz 3.4.16:

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} .$$

Nach dem Theorem von Little ist $E[W] = E[N]/\lambda - E[S]$, also im vorliegenden Fall

$$E[W] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} .$$

Für den Spezialfall M/M/1 errechnet man wegen $E[S] = 1/\mu$ und $E[S^2] = 2/\mu^2$ den Mittelwert

$$E[W] = \frac{2\rho\mu}{2(1-\rho)\mu^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

Die Strategie Round-Robin

$$E[U(t)] = \frac{t}{1-\rho} .$$

$$E[W(t)] = \frac{t}{1-\rho} - t$$

σ	Wahrscheinlichkeit, daß zuletzt bearbeiteter Auftrag nicht fertig ist.
g_i	Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt.
π_j	Wahrscheinlichkeit dafür, daß j Aufträge im System sind.
$U_k(j)$	Verweilzeit eines Auftrages, der k Quanten benötigt und bei dessen Ankunft bereits j Aufträge im System sind.
$E[U_k]$	Mittlere Verweilzeit eines Auftrags mit k Quanten Bedienzeitbedarf.
$E[D_i(j)]$	Für den i-ten Durchlauf benötigte Zeit (= Wartezeit + ein Bedienquant), wenn bei der erstmaligen Ankunft j Aufträge im System sind.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

1. $g_i = \sigma^{i-1}(1-\sigma)$

2. $E[S] = \sum_{i=1}^{\infty}(iQ)g_i = \frac{Q}{1-\sigma}$

3. $E[S^2] = Q^2\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\sigma^i = Q^2\frac{1+\sigma}{(1-\sigma)^2}$

4. $E[U_k] = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j E[U_k(j)]$

5. $E[U_k(j)] = \sum_{i=1}^{k} E[D_i(j)]$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

6. $E[D_{i+1}(j)] = \sigma Q(x/Q-1) + \lambda x Q + Q$
$= \sigma x - \sigma Q + \lambda Q x + Q$
$= (\lambda Q + \sigma)E[D_i(j)] + (1-\sigma)Q$.

7. $E[D_2(j)] = \lambda Q E[D_1(j)] + \sigma j Q + Q$

8. $E[D_i(j)] = (\lambda Q + \sigma)^{i-2}E[D_2(j)] + Q(1-\sigma)\dfrac{1-(\lambda Q+\sigma)^{i-2}}{1-\lambda Q-\sigma}$

9. $U_1(j) = D_1(j)$

10. $\alpha = \lambda Q + \sigma$

11. $E[U_1] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[D_1(j)]$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

12. $E[U_k] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[U_k(j)]$
$= E[U_1] + \dfrac{(k-1)Q}{1-\rho} + Q\left(\lambda E[U_1] + E[N] - \dfrac{\rho}{1-\rho}\right)\dfrac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}$

13. $E[U_1] = E[Q_r] + E[N_q]Q + Q$

14. $E[Q_r] = \rho\dfrac{E[Q^2]}{2E[Q]} = \dfrac{\rho Q}{2}$

15. $E[U_1] = (1-\rho/2+E[N])Q$

16. $E[U(t)] = \lim_{Q\to 0} E[U_{t/Q}] = \lim_{Q\to 0}\left(E[U_1] + \dfrac{t/Q-1}{1-\rho}Q\right)$
$= \lim_{Q\to 0}\dfrac{t/Q-1}{1-\rho}Q = \dfrac{t}{1-\rho}$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Nicht verdrängende Abarbeitung nach Prioritäten

Ankunftsverteilung der Priorität i: $1-e^{-\lambda_i t}$

Bedienzeitverteilung der Priorität i: $1-e^{-\mu_i t}$

Auslastungsanteil der Priorität i: $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$

$$E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)} ,$$

mit $\beta_0 = 0$ **und** $\beta_i = \sum_{j=1}^{i}\rho_j$ **für** $i > 0$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Beweis:

$E[U_k]$ mittlere Verweilzeit für Aufträge der Priorität k

$E[W_k]$ mittlere Wartezeit für Aufträge der Priorität k

$E[S_k]$ mittlere Bedienzeit für Aufträge der Priorität k

$E[U_k] = E[W_k] + E[S_k]$

Man betrachtet einen markierten Auftrag mit Priorität k, der bei seiner Ankunft in den Warteschlangen der Prioritäten i mit $1 \le i \le k$ jeweils n_i Aufträge vorfindet.

W'_k durch diese Aufträge verursachte Wartezeit

W''_k Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen q_1 bis q_{k-1} ankommen

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Dann gilt

$$E[W_k] = E[R] + E[W_k'] + E[W_k'']$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k E[R_k]\right) + E[W_k'] + E[W_k'']$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda E[S_k^2]\right) + E[W_k'] + E[W_k''] \, .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Nach Definition ist

$$E[W_k'] = \sum_{i=1}^{k} E[N_i]E[S_i]$$

Anwendung des Theorems von Little mit $\rho_i = \lambda_i E[S_i]$

$$E[W_k'] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E[W_i]E[S_i] = \sum_{i=1}^{k} \rho_i E[W_i] .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Außerdem gilt

$$E[W_k''] = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i E[W_k]E[S_i] = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k]$$

und somit

$$E[W_k] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^{k} \rho_i E[W_i] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k] .$$

Durch Auflösen nach $E[W_k]$ erhält man

$$E[W_k] = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_i]}{1 - \sum_{i=1}^{k} \rho_i} .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Setzt man $\beta_0 = 0$ und $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j$ für $i > 0$, so kann man mittels vollständiger Induktion über k zeigen:

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} = \frac{1}{1-\beta_k} .$$

Für $k = 1$ besagt dies nämlich

$$1 + \frac{\rho_1}{(1-\beta_0)(1-\beta_1)} = \frac{1}{1-\beta_1} ,$$

was trivialerweise richtig ist.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Unter der Annahme, daß die Aussage für k richtig ist, ergibt sich

$$1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} = \frac{1}{1-\beta_k}+\frac{\rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} = \frac{1-\beta_{k+1}+\rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} = \frac{1}{1-\beta_{k+1}}.$$

Weiter ist $E[W_1] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_0)(1-\beta_1)}$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Gilt zudem für $k \le n$ die Beziehung $E[W_k] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)}$,

so errechnet man $E[W_{n+1}] = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)}\right)}{2(1-\beta_{n+1})} = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]\right)\frac{1}{1-\beta_n}}{2(1-\beta_{n+1})}$.

Durch vollständige Induktion ergibt sich somit $E[W_k] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)}$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei SJF

Shortest Job First

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1+\lambda t e^{-\mu t}+\frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu t}-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2} = \frac{\lambda}{\mu^2}(1-\rho+\rho e^{-\mu t}(1+\mu t))^{-2} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho(1-e^{-\mu t}(1+\mu t)))^{-2}}.$$

Beweis:

g_i Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt.

$B(t)$ Bedienzeitverteilung

Mit $\lambda_k = \lambda g_k$ und $\rho_k = kQ\lambda g_k$ verhält sich das System wie ein Prioritätensystem.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei SJF

Es gilt deshalb

$$E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda H_{k-1}(S))(1-\lambda H_k(S))}$$

mit $H_i(S) = \sum_{j=1}^{i}(jQg_j)$.

Setzt man $t = kQ$ und betrachtet den Grenzübergang $Q \to 0$, so ergibt sich

$$E[W(t)] = \frac{1}{2}\lambda E[S^2](1-\lambda H_{t/Q}(S))^{-2} = \frac{1}{2}\lambda E[S^2]\left(1-\lambda\int_0^t i\,dB(i)\right)^{-2}.$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei SJF

Im Spezialfall $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$ ergibt sich

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1 - \lambda\int_0^t x\mu e^{-\mu x}dx\right)^{-2} .$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_0^t x\mu e^{-\mu x}dx = -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} .$$

Einsetzung in die obige Formel liefert

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1 + \lambda te^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu^2}(1 - \rho + \rho e^{-\mu t}(1 + \mu t))^{-2}$$

$$= \frac{\rho}{\mu(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}(1 + \mu t)))^2} .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Multi Level Feed Back (MLFB)

$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^t x^2 dB(x) + t^2(1 - B(t))}{\left(1 - \lambda\int_0^t xdB(x) - \lambda t(1 - B(t))\right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda\int_0^t xdB(x) - \lambda t(1 - B(t))} - t$$

Für $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ermittelt man hieraus

$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu}\frac{\rho - (\lambda t + \rho)e^{-\mu t}}{(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}))^2} + \frac{t}{1 - \rho(1 - e^{-\mu t})} - t .$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Beweis

- g_i Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt.
- W_k Wartezeit für Aufträge mit k Quanten Bedienzeit
- W'_k Durch diese Aufträge verursachte Wartezeit
- W''_k Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen q_1 bis q_{k-1} ankommen
- S_k Bedienzeit, die ein Auftrag während seiner Verweilzeit in den ersten k Warteschlangen verbraucht

Mit diesen Bezeichnungen ist $E[S_k] = \sum_{i=1}^{k}((mp)^iQ)g_i + kQ\left(1 - \sum_{i=1}^{k} g_i\right)$.

Weiter gilt $E[W'_k] = \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}]$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Modifiziert man die Abarbeitung in der Art, daß jeder Auftrag sofort k Quanten zugeteilt bekommt und anschließend nach *MLFB* weiterverfahren wird, so hat dies keinen Einfluß auf die Verweilzeit von Aufträgen mit mehr als k Quanten Bedienzeitbedarf.

Bezeichnet man mit $\overline{W}_i$ (bzw. $\overline{Q}_i$) die Wartezeit für Aufträge in der i-ten Warteschlange (bzw. die Warteschlangenlänge) des neu konstruierten Systems, so gilt

$$E[\overline{W}_1] = E[\overline{R}] + E[\overline{Q}_1]E[\overline{S}_1],$$

wobei $E[\overline{W}_1] = E[W_k']$ ist und $E[\overline{S}_1] = E[S_k]$.

Unter Benutzung des Theorems von Little folgert man

$$E[\overline{W}_1] = E[\overline{R}] + \lambda E[\overline{W}_1]E[\overline{S}_1].$$

Also ist $E[\overline{W}_1] = \dfrac{E[\overline{R}]}{1 - \lambda E[\overline{S}_1]}$.

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Sei $\bar{\lambda}_i$ für $i \geq 2$ die Ankunftsrate in der i-ten Warteschlange des neuen Systems, dann gilt

$$\bar{\lambda}_i = \lambda \sum_{j=k+i-1}^{\infty} g_i = \lambda(1 - G(k+i-2))$$

mit $G(j) = \sum_{i=1}^{j} g_i$

und somit

$$E[\bar{R}] = \frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_i}{2}Q^2$$

$$= \frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2}Q^2 \sum_{i=0}^{\infty}(1 - G(k+i)).$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Also ist

$$E[W_k] = E[W_k'] + E[W_k'']$$

$$= \frac{E[\bar{R}]}{1 - \lambda E[\bar{S}_1]} + \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}]$$

und weiter

$$E[W_k] = \frac{\lambda E[\bar{R}] + \lambda Q(k-1)E[S_{k-1}]}{(1 - \lambda E[S_{k-1}])(1 - \lambda E[S_k])}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2}Q^2 \sum_{i=k}^{\infty}(1 - G(i))}{(1 - \lambda E[S_{k-1}])(1 - \lambda E[S_k])} + \frac{\lambda E[S_{k-1}]}{1 - \lambda E[S_{k-1}]}(k-1)Q.$$

Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Der Grenzübergang $Q \to 0$ liefert mit $t = kQ$

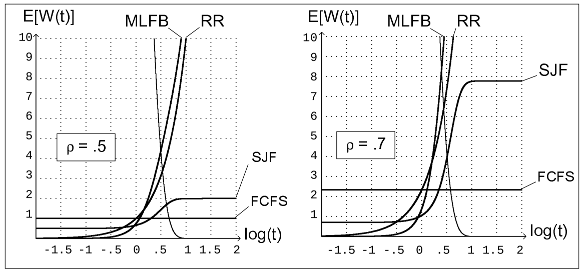
$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^t x^2 dB(x) + t^2(1 - B(t))}{\left(1 - \lambda\int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))\right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda\int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))} - t.$$

Für $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ermittelt man hieraus

$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu}\frac{\rho - (\lambda t + \rho)e^{-\mu t}}{(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}))^2} + \frac{t}{1 - \rho(1 - e^{-\mu t})} - t.$$

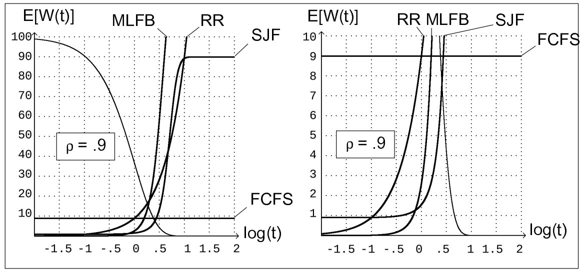
Die analytische Methode: Vergleich verschiedener Strategien

Graphische Darstellung der Ergebnisse



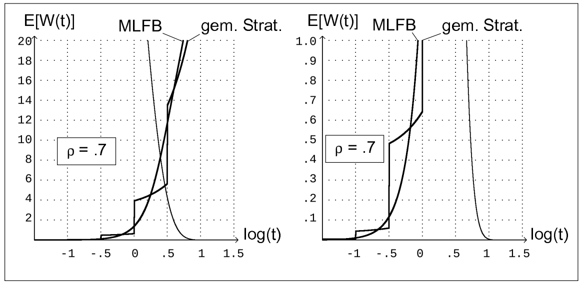
Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 50% und 70% Auslastung der Bedienstation

Die dünn gezeichnete Kurve gibt an, für wieviel Prozent der Aufträge die Bedienzeit länger ist als der jeweilige Abszissenwert.



Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 90% Auslastung der Bedienstation

Gemischte Strategien



Gemischte Strategie bei exponentieller Bedienzeitverteilung mit $a[0] = 0$, $a[i] = 10^{(i-4)/2}$ für $1 \le i \le 7$ und $a[8] = \infty$ unter ausschließlicher Verwendung von *FCFS* im Vergleich mit *MLFB*.

Die Auslastung ρ ist 0.7, Zeiteinheit ist die mittlere Bedienzeit. Die dünn gezeichnete Kurve gibt an, für wieviel Prozent der Aufträge die Bedienzeit länger ist als der jeweilige Abszissenwert.