Aufgabe 9: Little's Theorem

a) In der operationellen Methode haben Sie Little's Theorem:kennengelernt. Beweisen Sie die Aussage:

$$E[Q] = \lambda \cdot E[W]$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 9: Little's Theorem

Fuer den Beweis erinnern wir uns an die Definition der Wartezeit eines Auftrags P_i:

$$W_i := \sum_{t'=0}^{T-1} W_i(t')\Delta t \text{ ,}$$

der mittleren Wartezeit:

$$E[W] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \text{ ,}$$

der Warteschlangenlaenge:

$$Q(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t) \text{ ,}$$

und der mittleren Warteschlangenlaenge:

$$E[Q] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} Q(t) \text{ .}$$

Nun fehlt uns noch die formale Beschreibung des mittleren Ankunftsrate:

$$\lambda := \frac{n}{T\Delta t} \quad .$$

Betrachte nun:

$$\lambda \cdot E[W] = \frac{n}{T\Delta t} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

setze die mittlere Wartezeit ein

$$= \frac{n}{T\Delta t} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{T-1} W_i(t)\Delta t$$

ziehe Δt nach vorne und vertausche die Summen:

$$= \frac{\Delta t}{T\Delta t} \cdot \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{i=1}^{n} W_i(t)$$

somit ergibt sich:

$$= \frac{\Delta t}{T\Delta t} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} Q(t) = E[Q]$$