

Verlässliche Echtzeitsysteme

Abstrakte Interpretation

Fabian Scheler

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl Informatik 4 (Verteilte Systeme und Betriebssysteme)
www4.informatik.uni-erlangen.de

13. Mai 2013



Fragestellungen

- Warum ist es so schwierig **Korrektheitsaussagen** zu formulieren?
 - auch wenn nur eine **bestimmten Programmeigenschaft** relevant ist↪ Wie hilft uns „**Abstrakte Interpretation**“ bei diesem Problem?
- Was sind die **mathematischen Grundlagen** abstrakter Interpretation?
 - eine „informelle“ Sichtweise auf die Zusammenhänge
- **Ziel:** **grobes Verständnis** abstrakter Interpretation entwickeln!



Gliederung

- 1 Überblick
- 2 Problemstellung
- 3 Sammelsemantiken
- 4 Präfixsemantiken
- 5 Mathematische Grundlagen
- 6 Zusammenfassung



Sag mir, wie hältst du es mit den Defekten?

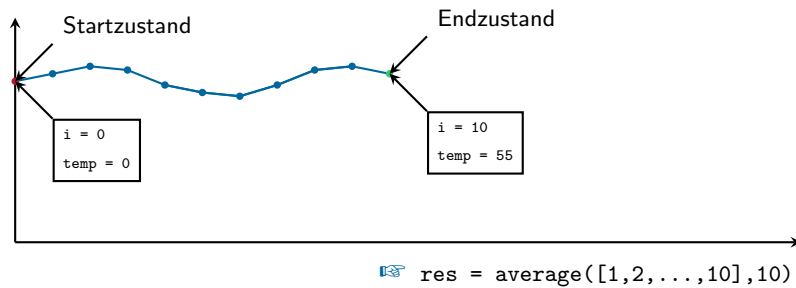
Die Gretchenfrage der Softwareentwicklung ...

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2 unsigned int size)  
3 {  
4     unsigned int temp = 0;  
5  
6     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
7         temp += array[i];  
8     }  
9  
10    return temp/size;  
11 }
```

- Wo könnte es hier klemmen?
 - Ist der Zugriff auf Feld array in Zeile 7 korrekt?
 - Kann die Addition in Zeile 7 überlaufen?
 - Kann in Zeile 10 eine Division durch 0 auftreten?
- Wie findet man das heraus?
 - ↪ Schauen wir mal, wie sich das Programm verhält.



Das Verhalten zur Laufzeit ist entscheidend!



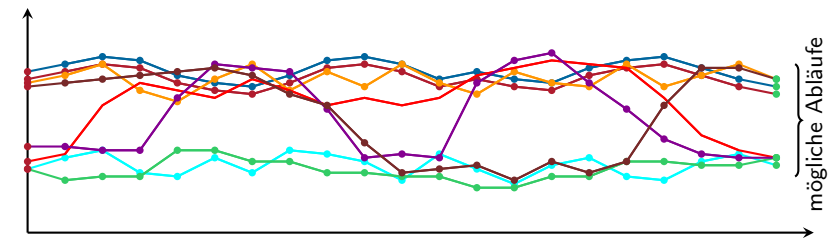
```

1  uint average(uint *array,
2             uint size)
3  {
4      uint temp = 0;
5
6      for(uint i = 0; i < size; i++)
7      {
8          temp += array[i];
9      }
10
11     return temp/size;
12 }
    
```

i	temp
0	0
1	1
2	3
3	6
...	...
10	55

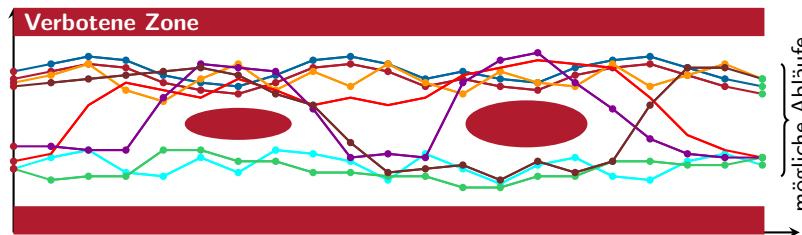
Konkrete Programmsemantik

Eine informelle Einführung in die Prinzipien abstrakter Interpretation [1]



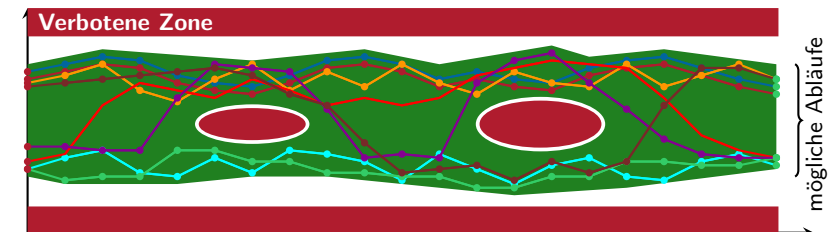
- die **konkrete Semantik** (engl. *concrete semantics*) beschreibt
 - alle möglichen Ausführungen eines Programms
 - unter allen möglichen Ausführungsbedingungen
 - Für unser Beispiel bedeutet dies:
 - 2^{32} verschieden große Felder, 2^{32} verschiedene Werte für jedes Element
- sie beschreibt ein „unendliches“ mathematisches Objekt
 - im Allgemeinen **nicht berechenbar** durch einen Algorithmus
 - alle nicht-trivialen Fragestellungen sind **nicht entscheidbar**

Sicherheitseigenschaft



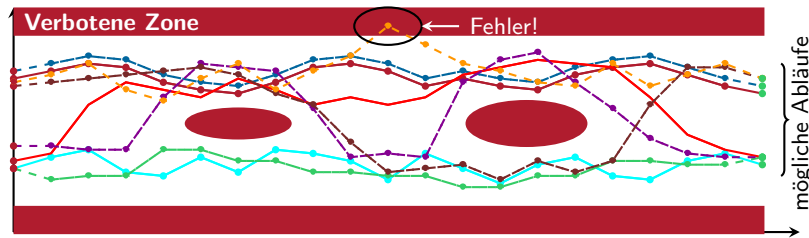
- **Sicherheitseigenschaften** (engl. *safety properties*) stellen sicher, dass keine **fehlerhaften Zustände** eingenommen werden
 - ein **Sicherheitsnachweis** (engl. *safety proof*) garantiert, dass die konkrete Semantik nie eine **verbotene Zone** durchläuft
- das ist ein **unentscheidbares Problem**
- die konkrete Programmsemantik ist nicht berechenbar

Abstrakte Interpretation



- **Abstrakte Interpretation** (engl. *abstract interpretation*)
 - betrachtet eine **abstrakte Semantik** (engl. *abstract semantics*)
 - sie umfasst **alle Fälle der konkreten Programmsemantik**
 - ist die abstrakte Semantik sicher \Rightarrow konkrete Semantik ist sicher

Vergleich: Testen



- Testen betrachtet **nur eine Teilmenge** aller möglichen Ausführungen
 - ↪ gut geeignet, um die **Existenz** von Defekten zu zeigen
 - ↪ ungeeignet, um ihre **Abwesenheit** zu zeigen
 - evtl. hat man die fehlerhafte Ausführung einfach nicht getestet
- Problem: **unzureichende Abdeckung** der konkreten Semantik



Formale Methoden sind abstrakte Interpretationen

Die abstrakte Semantik wird aber auf unterschiedliche Weise bestimmt

Model Checking

- abstrakte Semantik wird explizit vom Nutzer angegeben
 - ↪ endliche Beschreibung der konkreten Programmsemantik
 - z.B. endliche Automaten, Aussagen- oder Prädikatenlogik
- automatische Ableitung durch **statische Analyse**

Deduktive Methoden

- abstrakte Semantik wird durch Nachbedingungen beschrieben
- Nutzer gibt sie durch induktive Argumente an
 - z.B. Vorbedingungen und Invarianten
- automatische Ableitung durch **statische Analyse**

Statische Analyse

- abstrakte Semantik wird ausgehend vom Quelltext bestimmt
 - Abbildung auf **vorab bestimmte, wohldefinierte Abstraktionen**
- Anpassungen (automatisch/durch den Nutzer) sind möglich



Eigenschaften abstrakter Semantiken

Vollständigkeit und Korrektheit

- keine potentieller Defekt darf übersehen werden
 - ↪ nur so kann die Abwesenheit von Defekten gezeigt werden
 - ansonsten wäre gegenüber reinem Testen nichts gewonnen

Präzision

- weitgehende Vermeidung von **Fehlalarme** (engl. *false alarms*)
 - synonyme englische Bezeichnung: **false positives**
- ermöglicht erst eine vollkommen automatisierte Anwendung

geringe Komplexität

- Berechnung der abstrakten Semantik in akzeptabler Laufzeit
 - Vermeidung der **kombinatorischen Explosion** des Zustandsraums



Problemstellung

Reduktion des Zustandsraums ist unumgänglich!



- Fasse verschiedene Zustände geeignet zusammen
 - ↪ **Sammelsemantiken** (s. Folie VI/14 ff.)



- Betrachte nur die den Anfang der Zustandshistorie
 - ↪ **Präfixsemantiken** (s. Folie VI/25 ff.)

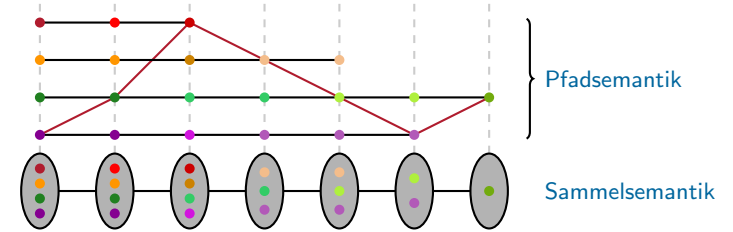


Gliederung

- 1 Überblick
- 2 Problemstellung
- 3 **Sammelsemantiken**
- 4 Präfixsemantiken
- 5 Mathematische Grundlagen
- 6 Zusammenfassung



Sammelsemantik (engl. *collecting semantics*)

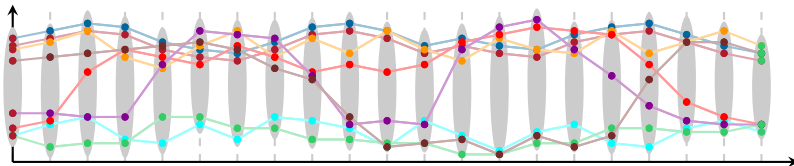


- sammelt die Zustände aller Pfade an einem bestimmten Punkt
 - δ an einer bestimmten Programmanweisung
 - aufgrund der Größe, wird sie i. d. R. approximiert
 - das ist eine **verlustbehaftete Abstraktion**
 - Beispiel: Existiert der rote Pfad?
 - konkrete Semantik \mapsto **Nein**, Sammelsemantik \mapsto ???
- Der **Laufzeitgewinn** wird durch **Unschärfe** erkaufte!
- das Ergebnis „**Weiß nicht ...**“ ist typisch für solche Methoden
 - und die Ursache vieler Vorbehalte ...

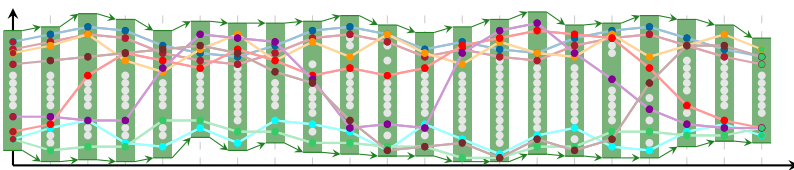


Intervallabstraktion

Als Approximation der Sammelsemantik



- die Sammelsemantik verwaltet Zustandsmengen
 - die Intervallabstraktion nur ihre oberen und unteren Schranken
 - die zu verwaltenden Daten werden dadurch beträchtliche reduziert
 - allerdings wird auch die Präzision reduziert
- \rightsquigarrow bestimmte Zustände im approximierten Zustandsraum werden nicht erreicht



Beispiel: Intervallabstraktion für ein C-Programm

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4     x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

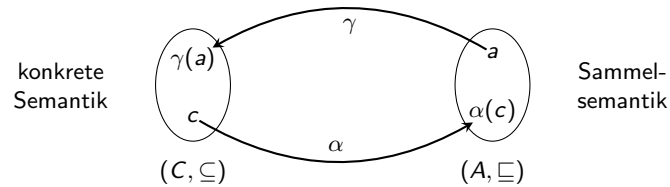
Die Intervallabstraktion liefert:

- Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$
- Zeile 4 $x_4 = (x_1 \cup x_5) \cap [-\infty, 9999]$
- Zeile 5 $x_5 = x_4 \oplus [1, 1]$
- Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_5) \cap [10000, \infty]$

- die Intervallabstraktion ist eine **manuell vorgegebene, abstrakte Interpretation** der Semantik der Programmiersprache C
 - C-Programme werden dann **automatisiert darauf abgebildet**
 - z. B. durch einen Übersetzer oder ein statisches Analysewerkzeug
 - nur Elemente, die den Wertebereich von x betreffen, sind relevant
- dies ist bereits eine **starke Vereinfachung**
 - angenommen x wäre eingangs nicht bekannt
 - \rightsquigarrow es gäbe 10000 verschiedene Pfade durch den Zustandsraum
 - nehme eine Schleifenobergrenze `unsigned short` y statt 10000 an
 - \rightsquigarrow es gäbe $\leq (2^{16})^2$ verschiedene Pfade durch den Zustandsraum



Was hält das zusammen? \leadsto Galoisverbindungen



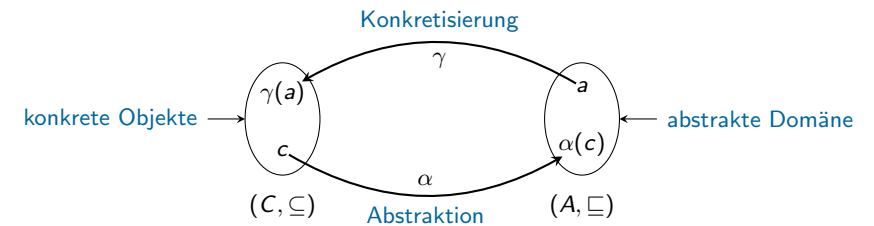
Galoisverbindung (engl. *galois connection*)

Eine **Galoisverbindung** $(C, \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (A, \subseteq)$ ist ein Paar (α, γ) von Abbildungen $\alpha : C \mapsto A$, $\gamma : A \mapsto C$ zwischen zwei partiell geordneten Mengen (C, \subseteq) und (A, \subseteq) :

- α und γ sind **monoton**
 - $\forall c, c' \in C : c \subseteq c' \Rightarrow \alpha(c) \subseteq \alpha(c')$
 - $\forall a, a' \in A : a \subseteq a' \Rightarrow \gamma(a) \subseteq \gamma(a')$
- $\alpha \circ \gamma$ ist **intensiv** (verkleinernd): $\forall a \in A : \alpha(\gamma(a)) \subseteq a$
- $\gamma \circ \alpha$ ist **extensiv** (erweiternd): $\forall c \in C : c \subseteq \gamma(\alpha(c))$



Abstraktion durch Galoisverbindungen



- wähle eine **abstrakte Domäne** (engl. *abstract domain*)
 - ersetzt die Menge konkreter Objekte S auf ihre Abstraktion $\alpha(S)$
 - verschiedene Domänen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Präzision
 - Vorzeichen, Intervalle, Oktagon, Polyhedra, ...
- **Abstraktionsfunktion** α (engl. *abstraction function*)
 - bildet die Menge konkrete Objekte auf ihre abstrakte Interpretation ab
- **Konkretisierungsfunktion** γ (engl. *concretization function*)
 - bildet die Menge abstrakter Objekte auf konkrete Objekte ab



Abstrakte Interpretation

- Nun benötigt man noch **lokal konsistente Funktionen**

Lokal konsistente Funktionen

Sei $(C, \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (A, \subseteq)$ eine Galoiseinbettung. Zwei Funktionen $f : C \mapsto C$ und $f' : A \mapsto A$ heißen **lokal konsistent**, falls gilt:

$$\forall c \in C : f(c) \subseteq \gamma(f'(\alpha(c)))$$

- statt die konkrete Funktion $f(c)$ zu berechnen
- kann man sie annähern, indem
 - man die abstrakte Funktion f' auf die Abstraktion $\alpha(c)$ anwendet
 - und das Ergebnis $f'(\alpha(c))$ wieder konkretisiert



Abstrakte Interpretation (Forts.)

Abstrakte Interpretation

Eine Abstraktion Interpretation besteht aus

- einer Galoiseinbettung $(C, \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (A, \subseteq)$ und
- zwei lokal konsistenten Funktionen
 - $f : C \mapsto C$
 - $f' : A \mapsto A$



Approximation von f durch die abstrakte Funktion f'

- häufig verwendet man **Galoiseinbettungen**
 - diese sind Galoisverbindungen $(C, \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (A, \subseteq)$
 - mit der Eigenschaft $\alpha(\gamma(a)) = a$
 - Konkretisierung gefolgt von Abstraktion impliziert keinen Präzisionsverlust



Beispiel: Intervallabstraktion [2, Woche 5]

- Approximation der Potenzmenge über ganzen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$I = \perp \cup \{[x, y] \mid x \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \wedge y \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \wedge x \leq y\}$$

- die Galoiseinbettung $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq) \xleftrightarrow[\alpha]{\gamma} (I, \sqsubseteq)$ ist gegeben durch

- die Konkretisierungsfunktion γ
- die Abstraktionsfunktion α

$$\gamma : \begin{cases} \perp \mapsto \emptyset \\ [a, b] \mapsto \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} \end{cases} \quad \alpha : \begin{cases} \emptyset \mapsto \perp \\ S \mapsto [\min S, \max S] \end{cases}$$

- Abstraktion \rightsquigarrow bestimme die Randpunkte des Intervalls
- Konkretisierung \rightsquigarrow bestimme den Inhalt des Intervalls

- Addition von Intervallen

$$X + \perp = \perp \quad \perp + X = \perp \\ [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$



Beispiel: Intervallabstraktion (Forts.)

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4     x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = (x_1 \cup x_5) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 5 $x_5 = x_4 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_5) \cap [10000, \infty]$

- Approximation durch **chaotische Iteration** (engl. *chaotic iteration*)

Iteration 1:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 1]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 2]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

Iteration 2:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 2]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 3]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$



Beispiel: Intervallabstraktion (Forts.)

```
1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4     x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = (x_1 \cup x_5) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 5 $x_5 = x_4 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \cup x_5) \cap [10000, \infty]$

- Approximation durch **chaotische Iteration** (engl. *chaotic iteration*)

Iteration 3:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 3]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 4]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

viele, viele Iterationen später:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 9999]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 10000]$

Zeile 7 $x_7 = [10000, 10000]$



Gliederung

1 Überblick

2 Problemstellung

3 Sammelsemantiken

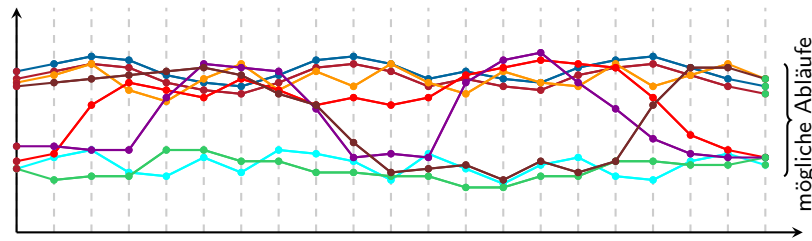
4 Präfixsemantiken

5 Mathematische Grundlagen

6 Zusammenfassung



Pfadsemantik



- betrachte durch ein Transitionssystem beschriebene Programmpfade
 - Ausgehend von ausgezeichneten Startzuständen,
 - beschreiben sie eine (unendliche) Abfolge von Programmzuständen,
 - deren Reihenfolge durch die Übergangsrelation bestimmt wird.
 ~ die Gesamtheit dieser Programmpfade heißt Pfadsemantik
 - Wie die konkrete Programmsemantik ist sie nicht berechenbar.
- Reduktion der Komplexität durch Abstraktion
 - unendliche Pfade ~ (endliche) Pfadpräfixe



Transitionssysteme

Definition: Transitionssystem

Ein Transitionssystem ist ein Quadrupel (S, I, F, \rightarrow)

- S ist eine Menge von Zuständen
- $I \subseteq S$ ist eine nicht-leere Menge von Startzuständen
- $F \subseteq S$ ist eine optionale Menge von Endzuständen
- $\rightarrow \subseteq S \times S$ ist die Übergangsrelation

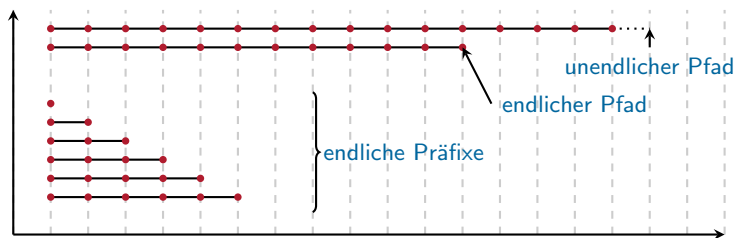
- Beispiel: euklidischer Algorithmus [2, Woche 1]

- $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\}$
- $F = \{(n, n) | n \in \mathbb{N}\}$
- Übergangsrelation \rightarrow :

$$\rightarrow: \begin{cases} (n, m) \rightarrow (n - m, m) & ; n > m \\ (n, m) \rightarrow (n, m - n) & ; m > n \end{cases}$$



Pfadpräfixe



- Pfadsemantiken enthalten alle endlichen und unendlichen Pfade
 - Pfadpräfixe enthalten nur die Anfänge dieser Pfade
- ☞ das ist eine verlustbehaftete Abstraktion
 - Beispiel: betrachte Worte der Sprache $a^n b$
 - Frage: Gibt es Worte mit unendlich vielen aufeinanderfolgenden 'a'?
 - Pfadsemantik: $\{a^n b | n \geq 0\} \mapsto$ Nein
 - Pfadpräfixe: $\{a^n | n \geq 0\} \cup \{a^n b | n \geq 0\} \mapsto$???



Pfadpräfixe und Fixpunkte

- Menge der Präfixe ist rekursiv:

$$\text{Präfixe} = \{x | x \in I\} \cup \{x_1 \rightarrow^* x_2 \rightarrow x_3 | x_1 \rightarrow^* x_2 \in \text{Präfixe} \wedge x_2 \rightarrow x_3 \in \rightarrow\}$$

- zu lösen ist die Fixpunktiteration $\text{Präfixe} = F(\text{Präfixe})$
 - üblicherweise besitzt diese Gleichung mehrere Lösungen
 - ~ ordne die Lösungen nach der Teilmengenbeziehung \subseteq
 - ~ wähle die kleinste Teilmenge als Lösung
 - ~ least fixpoint prefix trace semantics
- Vereinfachungen ermöglichen effektive, iterative Analysealgorithmen
 - Vereinfachung im Sinne von Abstraktion bzw. Approximation
 - ~ man muss nur noch die Präfixe betrachten
 - nicht mehr die vollständigen (evtl. unendlichen) Pfade



Gliederung

- 1 Überblick
- 2 Problemstellung
- 3 Sammelsemantiken
- 4 Präfixsemantiken
- 5 **Mathematische Grundlagen**
- 6 Zusammenfassung



Warum funktioniert das eigentlich ...?

- Wann ist eine Abstraktion **korrekt**?
 - ↪ Wenn sie durch eine **Galoisverbindung** beschrieben wird! ↪ **OK!**
- Fixpunkte ... wer sagt, dass die Iteration überhaupt **konvergiert**?
 - ↪ **Aufsteigende Kettenbedingung!** ↪ **???**
- Das waren ziemlich viele Iterationen ... geht das auch **schneller**?
 - ↪ **Widening-/Narrowing-Operatoren** helfen! ↪ **???**
- **Jetzt:** Grundlegende mathematische Zusammenhänge erfassen!
 - Was ist das und was hat es mit abstrakter Interpretation zu tun?
 - **Nicht:** Warum ist das korrekt?
 - keine Beweisführung ...



Partiell geordnete Mengen

- Konkrete und abstrakte Domänen sind **partiell geordnete Mengen!**

Partiell geordnete Mengen (engl. *partially ordered sets*)

Eine **partiell geordnete Menge** ist ein Tupel (S, \sqsubseteq) :

- S ist eine Menge,
- $\sqsubseteq \subseteq S \times S$ ist eine **Ordnungsrelation** mit folgenden Eigenschaften:

reflexiv $\forall x \in S : x \sqsubseteq x$

antisymmetrisch $\forall x, y \in S : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$

transitiv $\forall x, y, z \in S : x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$

- Beispiele:

- (\mathbb{N}, \leq) ist ein partiell geordnete Menge
- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ist ein partiell geordnete Menge



Obere und untere Schranken

- Sei (S, \sqsubseteq) eine partiell geordnete Menge

Obere Schranke (engl. *upper bound*)

$x \in S$ eine **obere Schranke** von $P \subseteq S \Leftrightarrow y \in P : y \sqsubseteq x$



analog: **untere Schranke** (engl. *lower bound*)

Kleinste obere Schranke (engl. *least upper bound*)

$x \in S$ ist eine **kleinste obere Schranke** von $P \subseteq S \Leftrightarrow$

- x ist eine obere Schranke von P und
- x ist kleiner als alle oberen Schranken von P :

$$\forall y \in S : (\forall z \in P : z \sqsubseteq y) \Rightarrow x \sqsubseteq y$$



analog: **größte untere Schranke** (engl. *greatest lower bound*)



Vollständige partielle Ordnungen

ω -Kette

Sei (S, \sqsubseteq) ein partiell geordnete Menge. Eine ω -Kette einer partiell geordneten Menge ist eine **aufsteigende Kette** aus Elementen $x_0, x_1, x_2, \dots \in S$ für die gilt:

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i \sqsubseteq \dots$$

- Eine partiell geordnete Menge erfüllt die **Aufsteigende Kettenbedingung**, wenn jede aufsteigende ω -Kette endlich ist.

Vollständige partielle Ordnung

Sei (S, \sqsubseteq) ein partiell geordnete Menge. Liegt für jede ω -Kette die kleinste obere Schranke der Menge $\{x_i | i \in \omega\}$ in S , so heißt (S, \sqsubseteq) **vollständige partielle Ordnung**.



Verbände

Vollständiger Verband (engl. *complete lattice*)

Ein **vollständiger Verband** ist eine partiell geordnete Menge $(S, \sqsubseteq, \perp, \top, \sqcup, \sqcap)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (S, \sqsubseteq) ist eine partiell geordnete Menge
- für jede Teilmenge $P \subseteq S$ existiert eine
 - eine kleinste obere Schranke $\sqcup P$ und
 - eine größte untere Schranke $\sqcap P$
- $\perp = \sqcap S$ heißt **Infimum** von S
- $\top = \sqcup S$ heißt **Supremum** von S

Beispiele:

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq, \emptyset, S, \cup, \cap)$ ist ein vollständiger Verband
- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq, -\infty, +\infty, \max, \min)$ ist ein vollständiger Verband
 - die Menge der ganzen Zahlen erweitert um $-\infty$ und $+\infty$



Terminierung der Fixpunktiteration

- **Möglichkeit 1:** aufsteigende Kettenbedingung **ist erfüllt**
 - ↪ aufsteigende Ketten sind endlich
 - ↪ Fixpunktiteration terminiert
- **Möglichkeit 2:** aufsteigende Kettenbedingung **ist nicht erfüllt**
 - ↪ Terminierung kann durch einen **Widening-Operator** erzwungen werden

Widening-Operator

Sei V ein Verband, ein **Widening-Operator** $\nabla : V \times V \mapsto V$ ist eine Abbildung für die gilt:

$$\forall x, y \in V : x \sqsubseteq x \nabla y \wedge y \sqsubseteq x \nabla y$$

- sicher Abschätzung der Elemente x und y nach oben durch $x \nabla y$
- ermöglicht auch eine Beschleunigung der Fixpunktiteration
 - Widening-Operator $\nabla \approx$ Bestimmung der kleinsten oberen Schranke
 - in vollständigen Verbänden mit aufsteigender Kettenbedingung



Beispiel: Intervallabstraktion (Forts.)

- kleinste obere Schranke

$$X \sqcup \perp = X$$

$$\perp \sqcup Y = Y$$

$$[a, b] \sqcup [c, d] = [\min(a, c), \max(b, d)]$$

- größte untere Schranke

$$X \sqcap \top = X$$

$$\top \sqcap Y = Y$$

$$[a, b] \sqcap [c, d] = \begin{cases} [\max(a, c), \min(b, d)]; & \max(a, c) \leq \min(b, d) \\ \perp; & \text{sonst} \end{cases}$$



Widening-Operator

$$X \nabla \perp = X \quad \perp \nabla X = X$$

$$[a, b] \nabla [c, d] = \left[\begin{cases} -\infty; c < a \\ a; c \geq a \end{cases}, \begin{cases} +\infty; d > b \\ b; d \leq b \end{cases} \right]$$

Narrowing-Operator

$$X \Delta \perp = X \quad \perp \Delta X = X$$

$$[a, b] \Delta [c, d] = \left[\begin{cases} c; a = -\infty \\ a; \text{sonst} \end{cases}, \begin{cases} d; b = +\infty \\ b; \text{sonst} \end{cases} \right]$$



```

1 unsigned short x = 1;
2
3 while(x < 10000) {
4     x = x + 1;
5 }
6
7 return x;
    
```

Die Intervallabstraktion liefert:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = (x_1 \nabla x_5) \cap [-\infty, 9999]$

Zeile 5 $x_5 = x_4 \oplus [1, 1]$

Zeile 7 $x_7 = (x_1 \nabla x_5) \cap [10000, \infty]$

Approximation mit Hilfe des Widening-Operators

Iteration 1:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 1]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 2]$

Zeile 7 $x_7 = \emptyset$

Iteration 2:

Zeile 1 $x_1 = [1, 1]$

Zeile 4 $x_4 = [1, 9999]$

Zeile 5 $x_5 = [2, 10000]$

Zeile 7 $x_7 = [10000, 10000]$

☞ Konvergenz in der 2. Iteration



Gliederung

1 Überblick

2 Problemstellung

3 Sammelsemantiken

4 Präfixsemantiken

5 Mathematische Grundlagen

6 Zusammenfassung



Zusammenfassung

Konkrete Programmsemantik ist **nicht berechenbar**

- Approximation durch eine **abstrakte Semantik**
 - Korrektheit der Approximation ist entscheidend
 - nur so kann man einen **Sicherheitsnachweis** führen
 - die Approximation muss präzise sein
 - nur so kann man **Fehlalarme** vermeiden
 - die Approximation darf nicht zu komplex sein
 - nur so kann sie **effizient berechnet** werden

Transitionssystem beschreiben Programme

- Pfadsemantiken beschreiben die konkrete Programmsemantik
- Approximation durch Pfadpräfixe und Sammelsemantik
 - ↪ abstrakte Interpretation approximiert die Sammelsemantik

Mathematische Grundlagen abstrakter Interpretation

- (vollständig) partiell geordnete Mengen, Verbände
- Galoiseinbettungen, lokale konsistente Funktionen, Widening
- Intervallabstraktion



- [1] COUSOT, P. :
Abstract Interpretation.
<http://web.mit.edu/16.399/www/>, 2005
- [2] MIDTGAARD, J. :
Abstract Interpretation.
<http://www.cs.au.dk/~jmi/AbsInt/>, 2012

